



SOCIETATEA ROMÂNĂ DE MATEMATICĂ APLICATĂ ȘI INDUSTRIALĂ

ROMAI EDUCATIONAL JOURNAL

VOL. 4 (2009)

Volumul 4 al **ROMAI Educational Journal** (REJ) conține atât lucrări prezentate în cadrul celei de-a 16-a ediții a Conferinței de Matematică Aplicată și Industrială (CAIM 2008), desfășurată în perioada 9- 12 octombrie 2008, la Oradea, cât și alte lucrări.

Remarcăm diversitatea tematică a lucrărilor publicate în acest număr. Mai precis, REJ 4 conține lucrări de istoria matematicii, studii privind evaluarea elevilor și studenților, studii privind impactul folosirii calculatoarelor în procesul educativ, eseuri de didactică matematică și exemple de bune practice.

Prin diversitatea lor, lucrările publicate pot fi utile tuturor factorilor implicați în procesul didactic.

*Prof. univ. dr. Adelina GEORGESCU
Președinte ROMAI*

*Conf. univ. dr. Cristian VOICA
Editor șef al REJ*

ROMAI EDUCATIONAL JOURNAL

INSTRUCȚIUNI PENTRU AUTORI

Articolele propuse spre publicare în această revistă pot fi scrise în română, engleză sau franceză, folosind limbajul Microsoft Office Word, fontul Tahoma, mărimea literei 12. Prima pagină va conține titlul articolului, autorul (autorii), afilierea autorului (autorilor), adresa completă a autorului (autorilor), inclusiv adresa de e-mail, titlul articolului în limba engleză (dacă articolul este scris într-o altă limbă), un abstract în limba engleză. Dacă este cazul, în articol pot fi inserate fotografii sau imagini. Bibliografia va include toate datele semnificative (autorii, titlul, volumul, pagina, anul, editorul), conform regulilor American Mathematical Society. Pentru articolele în limba română se vor folosi obligatoriu diacritice. Orice utilizare a unui material publicat anterior va fi referită bibliografic și va fi marcată corespunzător în lucrare. Este de preferat ca articolele să nu depășească 10 pagini. Pentru articole scrise în format electronic, autorii pot folosi una dintre adresele de e-mail ale membrilor Comitetului de Redacție, sau pot trimite copii xerox ale articolelor propuse spre publicare pe adresa:

*Cristian VOICA
Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București
Str. Academiei 14, 010014
București, România*

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The papers submitted to publication in our Journal can be written in Romanian, English or French, using Microsoft Office Word, Tahoma font and font size 12. The first page will contain the title, the authors, the author's affiliation and the complete address (including e-mail address), the title in English (if the article is written in another language), and an abstract. If necessary, pictures or images can be included. The references will contain all significant bibliographical data (authors, title, volume, pages, year, and editor), according to the AMS rules. Any use of a published material must be referred to in the paper.

Preferably the papers will be no longer than 10 pages. In submitting a paper, the authors are invited to send a file using the e-mail addresses of any person member of the Editorial Board or to send a Xerox copy to the address:

*Cristian VOICA
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
University of Bucharest
Str. Academiei 14, 010014
Bucharest, Romania*

IN MEMORIAM PROFESOR EUGEN ONOFRĂȘ

Liliana-Camelia SĂNDULESCU

Doctorand, Fabrica de combustibil nuclear, Mioveni, Argeș

lucsandra@yahoo.com



Abstract. Professor Eugen Onofraș was born at October 14, 1931 in the village of Tăbălăiești, commune of Averești, Vaslui (former Huși) county and died at January 22, 1991. His life was dedicated to the study of mathematics, activity with collegians and especially to the preparation of exceptional scholars for Olympiads. In spite of his hard life, he worked unceasingly in the mathematical research and didactics. He never forgot that a teacher must know very well the Romanian language, express himself correctly and easily in writing as well as viva voce. He was exacting first with himself and then with the scholars. I had the honor to be a former schoolgirl of Professor Eugen Onofraș for a period of four years at the "Mihai Viteazul" College in Ploiești, where he carried on most of his activity.

“Sunt născut la 14 oct. 1931 în satul Tăbălăiești, com Averești, jud. Vaslui (în fostul raion Huși)”, mărturisea prof. Eugen Onofraș într-una dintre autobiografiile sale. [1] Profesoara Olimpia Popescu, fostă inspectoare de matematică a Inspectoratului județean Prahova, spunea cu regret că “ la data de 22 ianuarie 1991, s-a stins prematur din viață profesorul Eugen Onofraș, colegul nostru, al tuturor profesorilor de matematică din România”. [2]

Dacă data trecerii sale în neființă este cea comunicată și de doamna inspectoare, chiar dacă nu am avut posibilitatea de a verifica în Registrul stării civile, data nașterii apare diferit în sursele de documentare pe care le-am avut la îndemână. Soția sa, doamna profesoară Viorica Onofraș, la această vreme singură și bolnavă, nu a mai avut la îndemână actele originale, pentru a le putea cerceta, dar îmi mărturisește că diferența apare datorită înregistrării târzii a nașterii, lucru frecvent în acele timpuri. Astfel, doamna inspectoare scrie în același articol: “S-a născut la data de 8 octombrie 1931, în orașul Huși, unde a urmat școala primară, pe cea gimnazială și liceul. Elevul eminent Eugen Onofraș a lăsat profesorilor și colegilor săi de la liceul din Huși o frumoasă amintire și un exemplu minunat, ce a fost dat multora din generațiile ulterioare.” [2]. Încin să cred că data nașterii amintită în propriile mărturii a fost cea serbată în timpul vieții sale și, prin acest expozeu, acum, când s-ar fi împlinit 77 de ani de la nașterea ilustrului profesor, să îi aduc un pios omagiu.

Mărturiile sale merg mai departe și aflăm cum și-a petrecut copilăria alături de familia sa; aceasta a fost nevoită să locuiască în diverse localități ale Moldovei, datorită faptului că tatăl său a fost mutat cu serviciul în fostele județe Fălciu, Baia, Iași, până în toamna anului 1938, când ajunge în comuna Copou – Iași. Aici, elevul Eugen Onofraș urmează clasele I – a III-a ale Școlii Elementare din localitate. În toamna anului 1940, tatăl său este mutat cu serviciul în com. Boteni–Muscel (jud. Argeș), dar restul familiei rămâne la Copou pentru că cei doi copii începuseră un nou an școlar. După terminarea anului școlar, familia se reunește la Boteni. Totuși, toamna anului 1941 aduce o nouă schimbare. Toată familia se mută la Huși și rămâne mai mult timp. Elevul Eugen Onofraș urmează în acest oraș clasa a IV- a elementară și clasele I- a VIII-a la liceul „Cuza Vodă”, pe care l-a absolvit în 1950.

„ În toamna anului 1943 tatăl meu este trimis disciplinar pe front, de unde se întoarce în decembrie 1945. Lucrează apoi ca jandarm în orașul Huși până în 1946 (aproximativ), când este scos din serviciu, în continuare ocupându-se de agricultură. În toamna anului 1949 este arestat și eliberat în decembrie 1956.” [1]

Nu uită să amintească faptul că a fost membru al organizației Tineretului Progresist și apoi al Uniunii Tineretului Muncitoresc (1944 - 1950), îndeplinind și o serie de sarcini din partea Comitetului Raional UTM- Huși.

Viața de elev nu a fost prea ușoară, din moment ce, la 1 septembrie 1949 a fost încadrat (la cerere) ca pedagog la Școala de Ucenici–Huși, astfel încât dimineața urma cursurile clasei a VIII-a de liceu, iar după aceea îndeplinea cerințele postului obținut.

În vara anului 1950 este admis, prin concurs cu rezultate remarcabile, ca student al Facultății de Matematică și Fizică – secția matematică – a Universității “A.I.Cuza” din Iași. A urmat cursurile anilor I și II în anii universitari 1950-1951 și 1951-1952, obținând rezultate deosebite la învățătură, fapt ce a făcut ca decanatul facultății să-l recomande pentru a continua studiile în fosta U.R.S.S.. Profesorul mărturisește că “nu am fost admis datorită originii mele sociale. (Menționez că, chiar de la concursul de admitere în facultate am declarat adevărul în legătură cu originea mea socială). În cursul anilor I și II am fost organizatorul UTM al secției matematică. Am beneficiat în această perioadă de numeroase ajutoare materiale acordate de către stat (cămin și cantină gratuite,

bursă lunară de 50 lei, ajutoare îmbrăcăminte: 16400 lei în 1950 și 8200 lei în 1951, ajutoare materiale din partea sindicatului studențesc.” [1]

Cu toate acestea, i se refuză înscrierea în anul III (toamna anului 1952), pe baza actelor existente la dosarul său, depus la înscrierea în facultate, așa cum mărturisește. “Precizez că mie personal nu mi s-au făcut nici un fel de imputări. În plus, menționez că nu am fost exclus din U.T.M., deși în aceea perioadă am avut o serie de contacte cu tovarășii din conducerea organizației U.T.M. a Universității. Deoarece încercările mele, atât la Iași cât și la București (la Comitetul pentru Învățământul Superior), de a obține o rezolvare favorabilă a situației în care mă aflam, nu au fost încununete de succes, am fost nevoit să mă întorc la Huși (în decembrie 1952).” [1]

Între 15.I.1953 și 18.VIII.1953 a funcționat ca profesor suplinitor de matematică la școala elementară din comuna Bunești, județul Vaslui (în fostul raion Huși). “După 18.VIII.1953, m-am dus din nou la Comitetul pentru Învățământ Superior și după o oarecare perioadă am fost primit în audiență de către tovarășul ministru Ilie Murgulescu. La aproximativ două săptămâni de la această audiență mi s-a comunicat în scris că C.J.S. a revenit asupra exmatriculării mele, permițându-mi înscrierea în anul al III-lea al facultății, cu toate drepturile avute la sfârșitul anului al II-lea.” Astfel, în anii universitari 1953-1954 și 1954-1955 a urmat cursurile anilor III și IV de facultate.

În vara anului 1955 este chemat la Ministerul Învățământului pentru repartizare. Terminase facultatea cu o medie care îl situa printe primii, nu i se admite repartizarea în învățământul superior. Alege liceul din Târgu Ocna, dar solicită încadrarea sa în orașul Huși, unde majoritatea profesorilor de matematică nu aveau calificarea corespunzătoare. După numeroase insistențe și după intervenția secției de învățământ a regiunii Iași, a fost încadrat, în ianuarie 1957, ca profesor de matematică la liceul “Cuza Vodă” Huși. Datorită situației tatălui său, este supus șicanelor și hărțuielilor, motiv pentru care decide să plece din oraș. A funcționat în această unitate de învățământ până la 31 august 1962, când a fost transferat, la cerere, împreună cu soția sa, în orașul Ploiești. Se căsătorește, în 20 ianuarie 1956, cu Smecat Viorica, pe atunci profesoară la liceul “M. Kogălniceanu” – Huși.

De la 1 septembrie 1962 până la 31 august 1963 a funcționat la secția serală a liceului Mihai Viteazul – Ploiești (la Rafinăria Teleajen), care se desființează în anul școlar următor și profesorul este transferat la liceul I. L. Caragiale – Ploiești, pentru următorii doi ani. La cerere, se transferă la Liceul nr. 2 – Ploiești (1 septembrie 1965), care, din februarie 1974, se va numi Liceul “Mihai Viteazul” și rămâne până la data decesului.

“În perioada în care am funcționat ca profesor am căutat să-mi îndeplinesc în cele mai bune condiții obligațiile de serviciu și consider că unde am lucrat munca mea a fost bine apreciată. Menționez că, în cei aproape 18 ani de muncă în învățământ, activitatea mea a fost controlată de către mai mulți tovarăși inspectori de specialitate ai organelor de învățământ județene (anterior raionale și regionale), de către doi tovarăși inspectori generali ai M.E.I. și de către patru lectori ai I.P.C.D. (Iași, Brașov, București).”

Perfecționarea ca profesor de matematică a fost continuă, dar a cuprins câteva etape mai importante:

- În august 1959 a urmat cursurile I.P.C.D.- Iași, care au avut loc la Bîrlad, obținând calificativul general 10 și i s-a acordat 1 an vechime în învățământ;
- Participă, în iulie 1963, la cursurile de vară de la Săcele- jud. Brașov;
- În luna iulie 1968, se desfășoară cursurile I.P.C.D. – București și tot în același an obține gradul didactic II;
- La 1 septembrie 1972, i se acordă gradul didactic I.

Profesorul E. Onofraș, în stilul său cunoscut de cei care i-au fost în preajmă, nu uită să sublinieze faptul că ambele grade i-au fost acordate prin concurs, nu a primit nimic pe gratis.

Participă la mai multe consfătuiri ale M.E.I. și ale Societății de Științe Matematice din R.S.R. (Tulcea 1966, București 1970, București 1971, Bacău, Sinaia, etc.). Prin Ordinul M.E.I. nr. 1465/26 iulie 1972, este numit în Comisia pentru învățământul matematicii din cadrul M.E.I. Acest lucru se întâmplă de mai multe ori, făcând parte din comisii care organizau Concursul de Matematică sau elaborau programe și manuale școlare. În paralel cu activitatea didactică, a desfășurat o bogată activitate în cadrul Societății de Științe Matematice din R.S.R. Participă la Cea de-a doua sesiune științifică a S.S.M.F. din 1957, unde a prezentat teme: "Asupra unor condiții suficiente de dezvoltare în serie Taylor" și "Asupra determinării unor intervale de existență posibilă pentru rădăcinile unei ecuații algebrice". La Cea de-a III-a Sesiune Științifică a S.S.M.F. din 12-13.02.1960, în program are două lucrări: "Determinarea extremelor polinoamelor prin procedee algebrice" și "Relații între laturile și unghiurile unui triunghi stabilite prin procedee geometrice", precum și la sesiunile filialei Prahova a S.S.M. din 1968 și din 1969, unde a susținut o serie de comunicări, dintre care două au fost publicate: una în țară și cealaltă în revista "Matematiceskoje Provescenie" (Moscova 1961). A publicat numeroase probleme în G.M.B. și a contribuit cu probleme la diferitele etape ale concursurilor de matematică.

Pe lângă sarcinile obișnuite ale muncii la catedră, a mai avut și alte activități în cadrul Liceului nr. 2 sau mai târziu "Mihai Viteazul." A fost mult timp numit șeful Catedrei de matematică, calitate în care s-a preocupat de buna desfășurare a activităților specifice, s-a preocupat de apariția unor rubrici ale Revistei Liceului, răspundea de buna desfășurare a tuturor concursurilor de matematică organizate de liceu, dar a fost și adjunctul comandantului centrului de pregătire militară a tineretului pentru apărarea patriei.

A fost desemnat, de către Inspectoratul Județean Prahova, să răspundă de organizarea și desfășurarea etapei județene a Concursurilor de matematică pentru clasele V- X ale școlilor generale, a fazelor județene ale Olimpiadelor școlare. S-a ocupat foarte mult de pregătirea elevilor pentru formarea lotului ce urma să participe la Olimpiada națională sau internațională. De asemenea, a fost responsabil al Cercului pedagogic al profesorilor de matematică din Ploiești, precum și vicepreședinte al filialei S.S.M.- Prahova.

Nu a scăpat nici de muncile obștești sau cultural-artistice, la care erau obligate cadrele didactice să participe și, așa cum l-am cunoscut, le făcea față cu multă seriozitate. A fost și membru de sindicat din 1949, după cum amintește în autobiografia sa, având anumite responsabilități.

Anul 1983 a fost remarcabil în activitatea sa publicistică. Editura Academiei îi publică una dintre cărțile sale, scrisă în colaborare cu Dan I. Brânzei, Sebastian Anița și Gh. Isvoranu, numită "Bazele raționamentului geometric". Prefața acestei cărți aduce următoarea mărturie din partea autorilor: "Asimilarea geometriei urmărește o spirală ce pornește de la intuirea vie a realității obiective; pe această spirală se pun în acord cu intuiția un număr crescând de propoziții din ce în ce mai abstracte: aceste propoziții devin cărămizile concrete din care se construiesc edificiile teoriilor abstracte ș.a.m.d. Anumite porțiuni din spirala asimilării geometriei sînt parcurse în învățământul preșcolar, altele în clasele primare, în gimnaziu, în liceu. *Scopul acestei cărți este de a contura încă o spirală ce ar urma celor din liceu*". [3]

În același an, apare la Editura Didactică și Pedagogică lucrarea: "Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu." Aceasta este scrisă în colaborare cu Eremia Georgescu-Buzău.

"Pentru viitorul matematician sau pentru cel care, pregătindu-se pentru alte domenii de activitate, dorește să utilizeze cunoștințele de matematică drept mijloc de investigație, perioada de formare presupune, printre altele, rezolvarea a cât mai multe probleme. În matematică, ca și în celelalte științe, nu există chei universale, motiv pentru care prin " metode de rezolvare a problemelor" nu se poate înțelege un rețetar absolut, care să asigure soluționarea tuturor problemelor de matematică pe baza unor formule cunoscute sau algoritmi prestabiliți" – precizează autorii în prefață. [4]

Publică articole în Revista de Pedagogie. Unul dintre acestea este " Recapitularea finală la matematică, în clasa a XI-a". Părerea sa este că "am evidențiat ideea că recapitularea, ca etapă a instruirii, nu trebuie să fie identificată cu repetarea. Ultima fiind necesară pentru recapitulare, este departe de a fi componenta principală a acesteia. Este o mare eroare să se transforme lecția de recapitulare într-o lecție de verificare frontală a cunoștințelor din unul sau mai multe capitole. Recitarea de către elev a unor definiții și propoziții matematice nu este în măsură să facă dovada pregătirii sale."

Poate cel mai important aspect al activității sale îl reprezintă rezultatele deosebite în pregătirea elevilor pentru a promova în trepte superioare de învățământ sau pentru a câștiga locuri pe podium la concursurile de matematică interne și internaționale. La Olimpiada Internațională de la Lienz-Tirolul de Est, din 1976, trei dintre cei șase participanți au fost elevii profesorului Eugen Onofraș: Buzăteanu Șerban, Manole Silvan și Macarie Ion, ultimii doi obținând premiul al III lea. Anul 1986 aduce premiul I, la Olimpiada internațională de matematică de la Varșovia, lui Marius Dabija, îndrumat fiind tot de profesorul Onofraș. Aproape în fiecare an au fost evidențiați elevi de-ai profesorului la concursurile naționale și internaționale.

Articolul d-nei profesoare Olimpia Popescu se încheie în modul următor: "Expunerea succintă a câtorva dintre realizările sale este o încercare de a readuce în memoria profesorilor din cele mai depărtate colțuri ale țării, imaginea colegului nostru Eugen Onofraș, căruia se cuvine să-i aducem un pios omagiu.". Același lucru am încercat și eu prin aceste rânduri.

Vă mulțumim, domnule profesor pentru ceea ce ați reușit să ne transmiteți!

Bibliografie

[1] *** *Autobiografie*, 1972;

[2] O. Popescu, *Profesorul Eugen Onofraș*, Gazeta Matematică, anul XCVI, Nr.11-12;

[3] D. Brânzei, S. Anița, E. Onofraș, Gh. Isvoranu, *Bazele raționamentului geometric*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1983

[4] E. Georgescu-Buzău, E. Onofraș, *Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.

CERCETAREA ÎN DIDACTICA MATEMATICII – O CENUȘĂREASĂ?

RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION – A CINDERELLA?

Cristian VOICA

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București, România
voica@gta.math.unibuc.ro

Mihaela SINGER

Facultatea de Litere și Științe
Universitatea din Ploiești, România
mikisinger@gmail.ro

Abstract. Mathematics education refers to the practice of teaching and learning mathematics, as well as to a field of research on this practice. Research in mathematics education has developed into a field of study, with specific theories, methods, and concepts. This article presents some personal points of view concerning the research in math education in Romania. We also present some research themes and results in the area.

1. Ce este didactica matematicii?

Unii o consideră o parte a pedagogiei. Alții, mai puțini, o consideră o parte a matematicii. Ce este de fapt?

Prestigioasa American Mathematical Society a alcătuit o listă de domenii și subdomenii matematice, numită *Mathematics subject classification* (disponibilă și pe internet, la adresa: <http://www.ams.org/msc/>, v.[5]). În această clasificare, alături de diverse domenii consacrate ale matematicii (cum ar fi, de exemplu, Number Theory, Commutative Rings and Algebras, Algebraic Geometry) apare și următorul domeniu și câteva subdomenii ale sale:

97–XX MATHEMATICS EDUCATION

- 97Axx General
- 97Bxx Educational policy and educational systems
- 97B10 Educational research and planning
- 97Cxx Psychology of and research in mathematics education
- 97Dxx Education and instruction in mathematics
- 97Uxx Educational material and media. Educational technology

Trecerea de la „metodica predării matematicii” (înțelesă ca o colecție de metode de aplicat la clasă) la „educație matematică” (din clasificarea AMS de mai sus), nu este întâmplătoare. Perspectiva anglo-saxonă centrată pe subiect – pe cel care învață – a favorizat glisarea de la predare la învățare și, într-un sens mai larg, la educație.

Către același tip de deschidere au mers și țările care au păstrat termenul de **didactică**, precum Franța sau Germania. Didactica, ce provine din grecescul *didáskein* (însemnând „a preda”), semnifică, în sens larg, teoria și practica predării și învățării. Didacticile reprezintă deci ansambluri de reguli de bune practici (și motivațiile acestor

reguli, ce dau deschiderile teoretice), utile în activitatea la clasă a profesorilor specializați într-un anumit domeniu de cunoaștere.

În ultimul timp, termenul de **educație matematică** (mathematics education), câștigă tot mai mult teren și desemnează un domeniu ce presupune în plus activitatea de cercetare a acestor practici. Cercetătorii în domeniul educației matematice sunt interesați, de exemplu, de construirea unor modele privind modul în care se produce învățarea, de dificultățile ce pot să apară în învățare, de explicarea cauzelor ce generează aceste dificultăți, precum și de identificarea unor moduri de depășire a acestora.

În această lucrare, folosim termenul „didactica matematicii” în accepțiunea „mathematics education”.

2. Situația din România

Diferența *didactică matematică – educație matematică* nu ține doar de denumire. Ne vom referi aici la percepțiile diferite asupra domeniului, pe care le-am remarcat în România, comparativ cu alte țări europene.

Am întâlnit deseori convingerea, exprimată mai ales de către diverși factori decizionali din țara noastră, conform căreia „pentru a fi un bun profesor, este suficient să fii un bun matematician (eventual, un bun rezolvitor de probleme)”.

Această părere este susținută inclusiv de modul în care este organizat învățământul superior românesc. La nivel universitar, există o filieră comună de pregătire pentru matematicieni (priviți ca specialiști în domeniu) și profesori de matematică. Pregătirea pentru cariera didactică este făcută printr-un modul facultativ, care conține un unic curs de un semestru de didactica matematicii. Programele specifice de masterat, care ar putea genera o pregătire profesională adecvată, sunt sau inexistente, sau inadecvate. Nu există posibilitatea unor studii doctorale de educație matematică. Pentru comparație cu situația din alte țări, se poate consulta, de exemplu, [4].

3. Percepții comune

Percepția „matematician bun = profesor bun” este vizibilă mai ales în lucrările publicate din domeniu.

În cele mai multe dintre lucrările de educație matematică publicate în România se pornește de la o problemă, se modifică ipoteza acesteia și se obțin astfel concluzii, extinderi, generalizări ale problemei inițiale. De același tip sunt lucrările în care se prezintă aplicații/ probleme-tip pentru un anumit conținut matematic.



Fragmentul care urmează (preluat din [2]), este inclus aici doar pentru a exemplifica acest tip de lucrare.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare are loc inegalitatea $R \geq 2r$, iar într-un triunghi obtuzunghic, avem $R \geq (1 + \sqrt{2})r$.

Demonstrație.

Din relația lui Euler, avem $OI^2 = R(R - 2Rr) \geq 0$,

(1)

de unde $R \geq 2r$. (2)

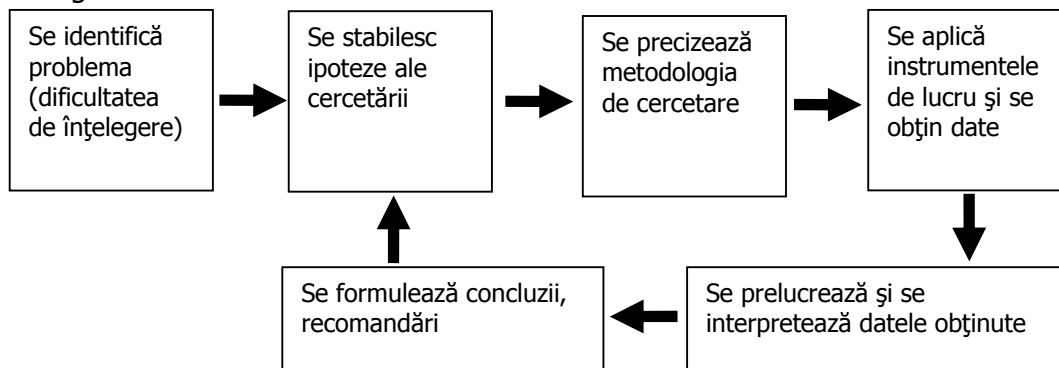
Egalitatea în (2) are loc când $O=I$, i.e. atunci când triunghiul ABC este echilateral. Dacă triunghiul este obtuzunghic, atunci centrul cercului circumscris se află în exteriorul triunghiului și, ca urmare, $OI \geq r$, deci $OI^2 \geq r^2$. (3)

Ținând cont de (1), din (3) obținem $R^2 - 2Rr - r^2 \geq 0$, (4)

de unde rezultă $R \geq (1 + \sqrt{2})r$. (5)

Egalitatea în relația (5) are loc în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

Alte lucrări (mult mai puține, din păcate), încearcă să explice dificultățile care pot să apară în învățare. O astfel de lucrare se bazează, de regulă, pe un studiu statistic sau pe un studiu de caz. În desfășurarea studiului, sunt parcurse succesiv câteva etape. Inițial, se identifică o anumită problemă legată de învățarea/ înțelegerea unui anumit concept și sunt stabilite ipoteze ale cercetării. Ulterior, se stabilește o metodologie a cercetării, se aplică instrumentele convenite pe lot, pe eșantion sau pe individ și se obțin date privind problematica analizată. Aceste date sunt prelucrate și sunt formulate concluzii care, eventual, sunt verificate în cadrul unui nou studiu. Un alt fapt care diferențiază acest tip de studiu de cel anterior, este acela că studiile de acest tip pornesc de la o amplă bibliografie în domeniu.



Includem spre exemplificare câteva fragmente dintr-un astfel de studiu [1].¹

Introducere. Un interesant studiu privind „gândirea liniară” a fost inițiat de o echipă de cercetători belgieni, condusă de Dirk De Bock (v., de ex., De Bock et al. (2002), Van Dooren et al. (2002)). Aceștia au analizat în detaliu aspecte legate de proporționalitate.

Una dintre întrebările propuse în cadrul acestui studiu este următoarea: „Se dă un patrat cu lungimea laturii l . Ce se va întâmpla cu aria pătratului dacă latura se dublează? Dar dacă latura se triplează? Cum se modifică perimetrul în aceleași condiții?”

Cele mai multe răspunsuri au fost greșite și anume: „Aria se dublează/ se triplează și ea.” Acest răspuns indică un mod de gândire liniar având în vedere faptul că se ignoră aspectul calitativ al problemei, și anume semnificația noțiunilor de arie și volum.

Spre deosebire de studiile citate anterior, lucrarea noastră are ca scop rafinarea ideii de liniaritate, prin evidențierea unor trepte ale acestui mod de gândire.

Metodologia cercetării. Am realizat acest studiu în două faze, folosind ca metodă de investigare chestionarul, aplicat unui eșantion alcătuit din 200 de persoane - elevi din clasele VII-XII și studenți din anii I-IV ai unor școli/ facultăți cu profil real. În prima etapă, subiecții au fost solicitați să rezolve 4 tipuri de itemi: completare de matrice, de șiruri numerice, de șiruri de simboluri și de figuri geometrice (vezi Anexa 1). Deoarece există o infinitate de moduri în care se poate răspunde la o astfel de întrebare, noi le-am cerut subiecților să folosească raționamentul care li se pare cel mai natural.

¹ Lucrările din care am preluat extrasele din cele două exemple de mai sus sunt disponibile și pe internet, la adresa: www.romai.ro

Rezultate. În accepțiunea noastră, gândirea liniară reprezintă *predispoziția indivizilor de a completa șiruri numerice sau de simboluri prin repetarea termenilor dați sau folosind combinații liniare ale acestora, precum și tendința de a reacționa asemănător în situații aparent similare.*

Am identificat cinci grade de liniaritate în gândire, și anume: translația sau gândirea pur liniară; aditivitatea unidimensională; translația și aditivitatea; aditivitatea bidimensională; multiplicativitatea sau gândirea neliniară.

Concluzii. Gândirea liniară se manifestă mai degrabă în lucrul cu simboluri decât în cel cu numere. O posibilă consecință a acestui fapt o reprezintă dificultatea în lucrul cu elemente ce țin de spații vectoriale. Instrumentul care a stat la baza obținerii acestei concluzii a fost diagrama de tip *box and whiskers*, având ca rol redarea distribuției răspunsurilor.

4. Deosebiri semnificative

Cele două tipuri de lucrări prezentate mai sus se deosebesc evident prin structură și prin modul de prezentare. Există însă și alte criterii care ne determină să spunem că aceste lucrări sunt fundamental diferite.

O primă deosebire constă în **focalizarea diferită** a lucrărilor. Primul tip de lucrare are în vedere un **conținut matematic**. Autorul prezintă produsul finit al unui demers de cercetare matematică, fără a preciza, însă, și etapele intermediare ale acestui demers. De aceea, aceste lucrări se adresează profesorilor (sau elevilor performanți la matematică), adică unor persoane care pot reconstitui și singure întregul proces. Al doilea tip de lucrare se focalizează însă pe **optimizarea învățării** și pe **înțelegerea obstacolelor** în învățare. Aceste lucrări au ca obiect de studiu persoane sau categorii de persoane (elevi performanți sau, dimpotrivă, elevi cu dificultăți în învățare; profesori începători sau profesori cu experiență; o anumită vârstă școlară etc). Ele pot prezenta atât studii empirice, care oferă explicații plauzibile pentru diverse date, dar și exemple de bune practici în activitatea didactică.

O a doua deosebire între cele două tipuri de lucrări este dată de **scopul** acestora. Lucrările focalizate pe conținutul matematic au ca scop **exersarea** abilității de rezolvare de probleme. Celelalte lucrări vizează însă **descoperirea** unor strategii pentru generarea progresului în învățare.

5. Posibile soluții

Un sistem de învățământ performant se poate dezvolta doar în contextul unei bune cooperări între specialiști în educație, pe de o parte, și practicieni – profesori, factori de decizie, factori politici, pe de altă parte. O componentă importantă a acestei cooperări o poate constitui și diseminarea rezultatelor cercetării în educația matematică.

Constatăm însă că, pentru România, există un număr extrem de redus de lucrări publicate în reviste de specialitate din străinătate sau de comunicări la conferințe internaționale, comparativ cu țările din regiune. (v. de ex. [6] pentru participarea la cea mai importantă manifestare internațională de educație matematică). Nici publicațiile din țară sau manifestările științifice de profil nu fac excepție. De regulă, comunicările sau lucrările publicate sunt focalizate pe dezvoltarea abilităților de rezolvare de probleme ale profesorilor sau ale elevilor performanți, neacordând nicio importanță dificultăților în învățare cu care se confruntă marea majoritate a elevilor.

În aceste condiții, câteva soluții se impun de la sine.

Este nevoie de crearea, la nivel național, a unei comunități profesionale de didacticieni. Cercetarea în didactica matematicii este o activitate de echipă: elaborarea

instrumentelor de cercetare, aplicarea lor, colectarea datelor, interpretarea acestora sunt activități care se desfășoară într-o perioadă îndelungată de timp. Mai mult, în absența unor școli-pilot, în care să se facă sistematic studii didactice, cercetarea se realizează de regulă „punctual”, pe loturi restrânse de elevi. Participarea în echipa de cercetare a învățătorului/ profesorului de la clasă poate spori în mod esențial calitatea cercetării, dar și calitatea procesului didactic. Rețeaua de didacticieni ar permite stabilirea de legături și realizarea unor studii în care pot fi implicate eșantioane diverse de elevi sau studenți, ce pot conduce la validarea unor concluzii ale studiilor educaționale.

La nivel universitar, este utilă valorificarea disponibilității studenților de a desfășura activități de cercetare aplicată. Experimentele desfășurate în ultimii ani, în cadrul cursurilor de didactică de la Universitățile din București și din Ploiești (unde predau autorii lucrării de față), arată că studenții pot desfășura activități de cercetare și pot realiza studii valoroase de educație matematică. De altfel, unele dintre aceste studii au fost prezentate de-a lungul anilor la diferite manifestări științifice, inclusiv în Conferințele CAIM.

De asemenea, credem că pot fi mai bine valorificate sesiunile de formare continuă a profesorilor. În vederea desfășurării unor activități de cercetare didactică (ce ar putea substitui actualele forme de evaluare), cursanții ar urma să parcurgă un tutorial de cercetare.

La toate nivelurile sistemului de învățământ, trebuie reconsiderată formarea abilităților de comunicare matematică. Putem afirma (fără însă a dispune de date statistice) că, în acest moment, evaluarea orală este neglijată total, atât în învățământul universitar, cât și în cel preuniversitar. Nici comunicării scrise a ideilor nu i se acordă o prea mare importanță. Credem că este nevoie de o educație specifică privind modul de redactare și prezentare a unei lucrări scrise, atât în ce privește formularea și argumentarea ideilor, cât și includerea referințelor bibliografice. Prezentarea unor idei simple, de tipul celor din [3], este mai mult decât necesară. Prin comparație, referatele pe care elevii (studenții) le copiază de pe Internet sunt departe de a fi o soluție în acest sens.

În concluzie, este nevoie de o nouă paradigmă privind cercetarea în didactica matematicii, pentru ca aceasta să nu mai aibă doar rolul de Cenușăreasă a cercetării în România.

Bibliografie

- [1] Banu, I., Popa, G., Roman, B., Șerban, O., Tătaru, A., *Gândirea liniară și influența acesteia asupra înțelegerii noțiunii de spațiu vectorial*, ROMAI Educational Journal **2** (2007), 14 – 25
- [2] Opreșor, V., *Aplicații ale lui R și r* , A XII-a Conferință de Matematică Aplicată și Industrială, Pitești, 15-17 octombrie 2004, Lucrările secției a VI-a – Educație, Proceedings, Editura Năstase, 2005
- [3] Spillman, B., Parberry, I. *How to present a paper: a speaker's guide*. North American Membrane Society, 2000, <http://www.eng.unt.edu/ian/pubs/>
- [4] William H. Schmidt et al., *The Preparation Gap: Teacher Education for Middle School Mathematics in Six Countries*, <http://usteds.msu.edu/MT21Report.pdf>, ICME 11 Report.
- [5] <http://www.ams.org/mathscinet/msc/msc.html>
- [6] <http://www.icme10.dk/pages/031text.htm>

DEVELOPMENT OF THE THEME IN THE PROCESS OF GEOMETRICAL PROBLEMS SOLUTION

Svetlana Lvovna VELMISOVA
Department of Mathematics,
Ulianovsk State University, Russia
velmisova@mail.ru

Michail Alecseevich RODIONOV
Department of Mathematics,
Penza State University, Russia
Do7tor@pnz.ru

Abstract. The article illustrates how a mathematical task can be developed by means of transformations of its conditions to construct a chain of tasks progressing in difficulty. Within the consideration of several intermediate tasks several new theorems are proved.

Keywords: geometric configuration, triangle, polygon, tetrahedron, square, ratio, interval length, bisector, median, generalization of results, combination of interconnections.

Introduction

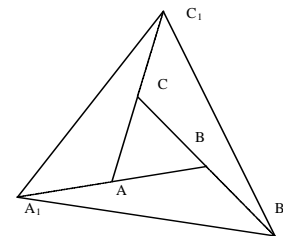
There are a lot of methodical approaches that motivate and stimulate the students to show their creative initiative in constructing mathematical problems. One of these approaches consists in transformation of a task which leads to a new task. The initiative is most effective when the result is expressed by the student in terms of conjectures and hypotheses. Within the process of consistent task transformation the students supported by the teacher can construct cycles/series of tasks (dynamical tasks) that are based on a common idea and cover a broad part of a mathematical course.

To illustrate this approach we have selected the topic AREAS of the elementary geometry college course. Consistent constructions of appropriate series of tasks and their solutions are represented below.

Let us consider the following initial task.

Initial task

Extend the edges of the triangle ABC as it is shown in Figure 1 locating the points A_1, B_1, C_1 so that $AA_1=AB, BB_1=CB, CC_1=AC$. Find the ratio of both triangles $A_1B_1C_1$ and ABC areas.



Solution. Notice that the triangles A_1AC and ABC have equal areas because they have one common vertex and equal altitudes. Similarly, the triangles $A_1CC_1, CC_1B, BC_1B_1, AB_1B, AA_1B_1$ have the same area as ABC . Hence, the ratio of these triangles areas and of ABC area equals 7.

To transform the task one should understand which elements may be varied or generalized. Among such elements we may consider vertices, directions that identify the points A_1, B_1, C_1 , lengths of segments, space dimension and also the question of interest which depends on the way of the task transformation.

After identifying these elements and ratios together with the students, the teacher offers them to point out several concepts:

Firstly, transformations of the triangle could result in the following: rectilinear triangle, rectilinear polygon, quadrangle, arbitrary polygon, rectilinear tetrahedron, arbitrary pyramid, simplex, spherical triangle.

Secondly, the segments can be selected at bisectors of triangle angles, medians, triangle altitudes, lines with arbitrary angles between them and triangle sides.

Thirdly, the lengths of triangle sides can be in different ratios with respect to the lengths of constructed segments or be equal to the lengths of other sides.

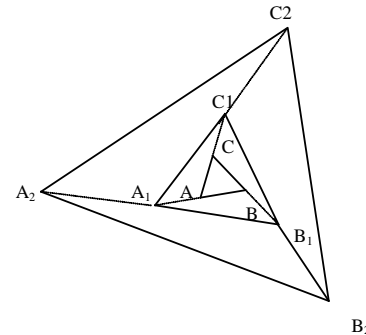
Fourthly, the task may be formulated in the 3-dimensional space or n -dimensional space.

So we can vary any element or combination of elements listed above and obtain series of tasks different in complexity, didactic and developmental opportunities. Note that each separate result can serve for further dynamical development of the initial task. Our experience shows that such development demonstrates the sense and value of the initial problem and outlines its characteristics which are not revealed in direct and/or trivial analysis. Here we present some directions of the initial task proposed by the students during practical classes.

First transformation direction

One may construct a sequence of comprehensive triangles and obtain the following task:

Task 1.1. There is a triangle ABC . The points A_1, B_1, C_1 are such that $AA_1=AB, BB_1=CB, CC_1=AC$. The points A_2, B_2, C_2 are such that $A_1A_2=A_1B_1, B_1B_2=C_1B_1, C_1C_2=A_1C_1$. Find the ratio of the triangles $A_2B_2C_2$ and ABC areas.



Second transformation direction

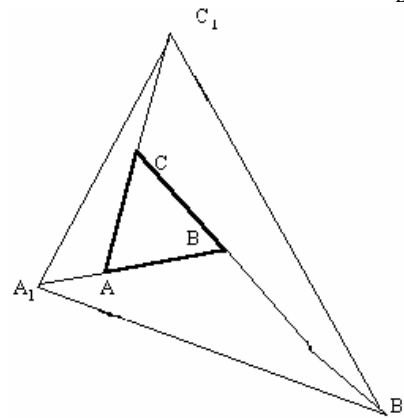
Let's change the lengths of the segments constructed on the rays from the points A, B, C outside the triangle. In this case the task can be formulated in the following way:

Task 2.1. Given a triangle ABC . The points A_1, B_1, C_1 are such that

a) $AA_1 = n AB, BB_1 = n CB, CC_1 = n AC$

b) $AA_1 = n AB, BB_1 = m CB, CC_1 = k AC$

Find the ratio of the triangles $A_1B_1C_1$ and ABC areas.



Having solved the problem we obtained that the areas ratio is equal to

a) $3n(n+1)+1$;

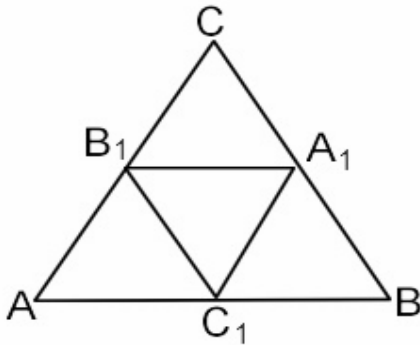
b) $m(n+1)+n(k+1)+k(m+1)+1$.

Further questions concerning the task development are:

- Could the points A_1, B_1, C_1 be taken on the edges of the triangle?
- Could the task be generalized by changing the number of the figure vertices in question?
- Is it possible to change the dimension of the problem?

Task 2.2. ABC is an arbitrary triangle. The points A_1, B_1, C_1 are such that C_1 belongs to the extension of BA in the direction from B to A, B_1 belongs to the extension of AC in the direction from A to C, A_1 belongs to the extension of CB in the direction from C to B and

a) $BC_1 = m AB, AB_1 = m AC, CA_1 = m CB$;
 b) $BC_1 = k AB, AB_1 = m AC, CA_1 = n CB$.



Find the ratio of the triangles $A_1B_1C_1$ and ABC areas.

Solution. Task 2.1 a) is a particular case of Task 2.2. a) with $m = n + 1$. If $m < 1$ then the points A_1, B_1, C_1 belong to the edges of ABC. Let us denote the areas of triangles $A_1B_1C_1$ and ABC as S_1 and S respectively. As the ratio of triangles with common angle equals the ratio of products of the segments lengths which form the angle we receive that $S_1 : S = 1 - 3m(1-m)$, where m is any positive number. As this ratio never vanishes it follows that the points A_1, B_1 , and C_1 are not located on one line.

Case b) requires deeper analysis. The ratio of the two triangles areas can be transformed into

$$S_1 : S = 1 - m(1 - k) - n(1 - m) - k(1 - m) \text{ or } S_1 : S = (1 - m)(1 - n)(1 - k) + m \cdot n \cdot k.$$

Let us assume that neither of the points A_1, B_1, C_1 coincides with a vertex of the triangle ABC. Then the last expression can be written as

$$S_1 : S = 1 + n'm'k', \text{ where } n' = n/(1-n), m' = m/(1-m), k' = k/(1-k).$$

The ratio of interest is zero (all the points - A_1, B_1 , and C_1 lie on one line) in case when $n' \cdot m' \cdot k' = -1$. The ratios of the length may take either positive or negative values. So, the points A, B, and C lie on a straight line if and only if $n' \cdot m' \cdot k' = -1$.

Let us consider particular cases when A_1, B_1, C_1 are the basis points of bisectors or of medians.

Task 2.3. Let the points A_1, B_1, C_1 be the midpoints of triangle ABC sides. Find the ratio of the triangles $A_1B_1C_1$ and ABC areas.

One can use the result obtained in Task 2.1 a) and take into account that $m=1/2$ to get $S_1 : S = 1/4$.

Task 2.4. In an arbitrary triangle ABC A_1, B_1, C_1 are the basis points of bisectors. Find the ratio of the triangles $A_1B_1C_1$ and ABC areas.

Solution. Let us denote the sides lengths of ABC as $BC = a, AC = b, AB = c$. Apply the bisector property in a triangle:

$$AB_1 : B_1C = c : a, CA_1 : A_1B = b : c, BC_1 : C_1A = a : b. \text{ Then}$$

$$m = CA_1 : CB, n = BC_1 : BA, k = AB_1 : AC, \text{ i.e. } m = \frac{c}{b+c}, n = \frac{a}{c+a}, k = \frac{b}{a+b}.$$

Using the result in Task 2.2 b) we can calculate the ratio

$$S_1 : S = \left(1 - \frac{c}{b+c}\right) \left(1 - \frac{a}{c+a}\right) \left(1 - \frac{b}{a+b}\right).$$

Hence, $S_1 : S = \frac{2abc}{(a+b)(c+a)(b+c)}$. As $(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \geq 8$, we conclude that

$S_1 : S \leq \frac{1}{4}$. Having compared the areas of triangles AB_1C_1 , C_1BA_1 , and A_1B_1C we can see

that the area of $A_1B_1C_1$ exceeds the smallest area of the triangles in question.

Let's denote $AB_1 : B_1C = n$, $CA_1 : A_1B = m$, $BC_1 : C_1A = k$ and consider all possible cases.

- $n \geq m \geq k \geq 1$.

In this case

$$S_{CA_1B_1} : S_{A_1B_1C_1} = \frac{m(1+k)}{1+mnk}$$

$$\text{and } 1 + m \cdot n \cdot k - m(1+k) \geq 1 + m^3 - m(1+m) = (1+m)(m-1)^2 \geq 0$$

$$\text{or } S_{CA_1B_1} : S_1 \leq 1, \text{ i.e. } S_1 \geq S_{CA_1B_1};$$

- $n \geq 1, k \leq 1$.

It's not difficult to check that

$$1 + n \cdot m \cdot k - m \cdot (1+k) = m \cdot k \cdot (n-1) + (1-m) \geq 0 \text{ and } S_1 \geq S_{CA_1B_1}.$$

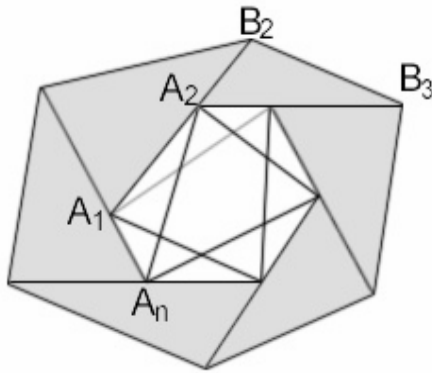
Task 2.5. The three points A_1 , B_1 , C_1 are on the sides of the triangle ABC correspondingly. Prove that the area of $A_1B_1C_1$ is not less than the area of AB_1C_1 , C_1A_1B , A_1B_1C .

If we consider the situation described in the Task 1.1 we note that the lines AA_1 , BB_1 , and CC_1 intersect the sides B_1C_1 , A_1C_1 , A_1B_1 in points A_2 , B_2 , C_2 so that

$$C_1A_2 : A_2B_1 = B_1C_2 : C_2A_1 = A_1B_2 : B_2C_1 = 1:2.$$

After this analysis several more tasks of this type may be formulated.

The third group of students proposed an arbitrary polygon to be considered.



Task 3.1. Each edge A_kA_{k+1} of a convex polygon $A_1...A_n$ ($n > 4$) is extended so that $A_{k+1}B_k = A_kA_{k+1}$. Prove that the area of the constructed polygon is no greater than 5 times than the area of the initial one.

Solution: It is necessary to prove that the sum of the n additional triangles areas shaded in the figure is not greater than $4S$ (S is the area of the initial polygon).

Each of these triangles is divided by its median into two triangles with equal areas.

Hence, its area is two times greater than the area of the triangle bounded by two adjacent sides and a diagonal of the initial polygon (corresponding triangles marked with black lines). But the sum of 'black' triangles areas obviously does not exceed $2S$.

We may obtain the next specification of the task if we consider rectilinear n -gon as a case of a convex n -gon.

Task 3.2. Each edge A_kA_{k+1} of a rectilinear n -gon $A_1...A_n$ is extended as follows: $A_{k+1}B_k = A_kA_{k+1}$. Find the ratio of the polygons $B_1...B_n$ and $A_1...A_n$ areas.

Further development of the considered task allows to formulate it in case of rectilinear n -gon.

Task 3.3. All sides of a rectilinear triangle ABC are extended with a segment of equal length: AB in the direction from A to B , BC in direction from B to C , CA in direction from

C to A. The new points are vertices of a new triangle $B_1C_1A_1$. Find the ratio of $B_1C_1A_1$ and ABC areas.

Task 3.4. Points C_1, A_1, B_1 belong respectively to the extensions of AB in the direction from A to B, BC in direction from B to C, CA in direction from C to A such that $BB_1 = n \cdot AB, CC_1 = n \cdot BC, AA_1 = n \cdot CA$. Find the ratio of $B_1C_1A_1$ and ABC areas.

Task 3.5. The points C_1, A_1, B_1 are located on the sides of the triangle ABC so that $AC = n \cdot AB, BA_1 = m \cdot BC, CB_1 = k \cdot CA$ (n, k, m are less than 1). The lines AA_1, BB_1 and CC_1 cross each other in points M, N, and P respectively. Find the ratio of MNP and ABC areas.

The next group of students proposed to consider various types of quadrangles instead of triangles. As a result a wide range of problems with different levels of difficulty have been constructed.

Task 4.1. The edges AB, BC, CD, and DA of a convex quadrangle ABCD are extended: AC in direction of B with $BB_1 = BC$, DC in direction of C with $CC_1 = DC$, AD in direction of D with $DD_1 = DA$, BA in direction of A with $AA_1 = AB$. Find the ratio of the quadrangles $A_1B_1C_1D_1$ and ABCD areas.

(Answer. $S_1 : S = 5$ where S_1 is the area of $A_1B_1C_1D_1$ and S is the area of ABCD)

Further generalization of the problem was generated by substituting numerical values or considering particular cases of quadrangles. Here are some examples.

Task 4.2. On the edges AB, BC, CD, and DA (or their extensions) of a convex quadrangle ABCD the points A_1, B_1, C_1, D_1 are selected so that: $AA_1 = n \cdot AB, BB_1 = n \cdot BC, CC_1 = n \cdot CD, DD_1 = n \cdot DA$. Find the ratio of the quadrangles $A_1B_1C_1D_1$ and ABCD areas. ($S_1 : S = 1 - 2n(1 - n)$)

Task 4.3. On the edges AB, BC, CD, and DA of a parallelogram ABCD the points A_1, B_1, C_1, D_1 are selected so that

$$AA_1 = n \cdot AB, BB_1 = m \cdot BC, CC_1 = n \cdot CD, DD_1 = m \cdot DA.$$

Prove that the points of the lines AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 intersection form a parallelogram and the ratio of the constructed and initial parallelogram areas is equal to

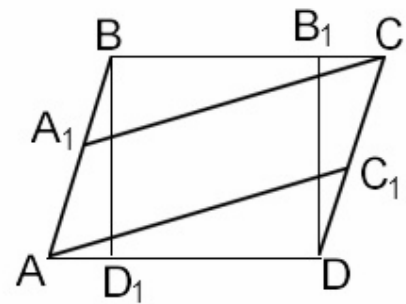
$$\frac{n \cdot m}{(1+n)(1+m)+1}.$$

Task 4.4. The middle points of a parallelogram edges are connected with the vertices of the corresponding opposite edge. Find the ratio of both constructed octagon and initial parallelogram areas.

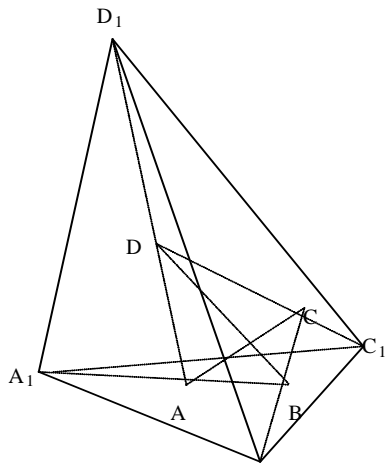
Task 4.5. The diagonals AC and BD of quadrangle ABCD are extended in directions of C and D in such a way that $CC_1 = n \cdot AC, DD_1 = m \cdot BD$. Find the ratio of quadrangles ABC_1D_1 and ABCD areas.

(Answer: $S_1 : S = (n+1)(m+1)$)

Task 4.6. The diagonals AC and BD of quadrangle ABCD are extended in such a way that $CC_1 = n \cdot AC, AA_1 = m \cdot AC, BB_1 = k \cdot BD, DD_1 = l \cdot BD$. Find the ratio of quadrangles $A_1B_1C_1D_1$ and ABCD areas.



Note. Further ways for developing the task may be concerned with spherical geometry. This kind of work was fulfilled by students in the form of individual tasks. The initial task may be the following:



Task 5.1. Edges of tetrahedron $ABCD$ are extended: BA in direction from B to A , CB in direction from C to B , DC in direction from B to C , AD in direction from A to D . The new points A_1 , B_1 , C_1 , and D_1 belong to these extensions with properties $AA_1 = AB$, $BB_1 = BC$, $CC_1 = CD$, $DD_1 = DA$. Find the ratio of the pyramids $A_1B_1C_1D_1$ and $ABCD$ volumes.

Task 5.2. Edges of tetrahedron $ABCD$ are extended: BA in direction from B to A , CB in direction from C to B , DC in direction from B to C , AD in direction from A to D . The new points A_1 , B_1 , C_1 , D_1 belong to these extensions with properties $AA_1 = n \cdot AB$, $BB_1 = n \cdot BC$, $CC_1 = n \cdot CD$, $DD_1 = n \cdot DA$. Find the ratio of the pyramids $A_1B_1C_1D_1$ and $ABCD$ volumes.

Tasks 2.3 may have spatial analogues:

Task 5.3. Bisector plane of dihedral angle splits the opposite edge in the ratio which equals the ratio of the sides squares.

Task 5.4. Bisector plane of dihedral angle divides the planes into triangles which areas are proportional to the areas of the planes which bound this dihedral angle.

Next step may include fourth parameter in the consideration of spherical triangles and n -dimensional simplexes. The students get opportunity to continue the work on the task and combine still unused material.

Conclusion

With the help of this example we tried to demonstrate how a "creative laboratory" can be "developed" within the framework of traditional mode of teaching and learning mathematics. We are convinced that such investigations allow not only to understand the material but also to develop students' creativity.

References

- [1] M. A. Rodionov, *The Motivation of mathematical studies and the ways to form it, the monograph*, Saransk, 2001. (Russian)
- [2] M. A. Rodionov and N. V. Sadovnikov, *Interaction of theoretical and practical aspects of tasks usage in mathematical teaching, tutorial for teachers and students, the training appliance*, Penza, 1997. (Russian)
- [3] E.E. Moise, *Elementary geometry from advanced Standpoint*, Reading (Mass), 1964. (USA)

JOCUL – METODĂ DE PREDARE PENTRU ELEVII CU CERINȚE EDUCATIVE SPECIALE

EDUCATIONAL GAMES – A TEACHING-LEARNING METHOD FOR STUDENTS WITH SPECIAL EDUCATIONAL NEEDS

Viorica – Cornelia BRONȚ

Grup Școlar "Ioan Bococi", Oradea

viqyorika@yahoo.com

1. Introducere

Una din formele de manifestare a elevului, indiferent de vârsta pe care o are acesta, este jocul. În mod obișnuit o asemenea activitate pornește din nevoia de acțiune, de mișcare a elevului- o modalitate de a-și consuma energia, sau de a se distra, un mod plăcut de a utiliza timpul. Atunci când jocul este utilizat în procesul de învățământ el dobândește funcții psihopedagogice, asigurând participarea activă a elevului la lecție, sporind interesul de cunoaștere față de conținutul lecției, față de materia predată. Știm că jocul didactic prezintă o metodă de învățare în care predomina acțiunea didactică stimulativă. Această acțiune valorifică la nivelul instrucției finalitățile adaptive de tip recreativ proprii activității umane.

Copiii își petrec majoritatea timpului liber jucându-se. Jocul reprezintă pentru copii o modalitate de a-și exprima propriile capacități. Prin joc, copilul capătă informații despre lumea în care trăiește, intră în contact cu oamenii și cu obiectele din mediul înconjurător și învață să se orienteze în spațiu și timp. Putem spune ca indiferent de vârstă jocul didactic este "munca" elevului. În timpul jocului, elevul vine în contact cu alte persoane. De aceea, jocul didactic are și un caracter social. Analiza unui joc permite cadrului didactic valorificarea principalelor 5 direcții de dezvoltare orientate astfel:

- de la grupe mici la grupe tot mai numeroase;
- de la grupe instabile la grupe tot mai stabile;
- de la jocuri fără subiect la jocuri cu subiect;
- de la șirul de episoade nelegate între ele spre jocuri cu subiect și cu desfășurare sistematică;
- de la reflectarea vieții personale la reflectarea evenimentelor vieții școlare.

În analiza jocurilor didactice, putem utiliza următoarea clasificare:

- I. După obiective prioritare: jocuri de observare, de dezvoltare a limbajului, de stimulare a cunoașterii interactive;
- II. După forma de exprimare: jocuri simbolice de orientare, de sensibilizare; conceptuale; ghicitori; jocuri de cuvinte încrucișate.
- III. După conținutul instruirii: jocuri matematice, jocuri muzicale, sportive, literare.
- IV. După sursele folosite: jocuri materiale, jocuri orale, pe bază de întrebări, pe bază de fișe individuale, pe calculator.
- V. După regulile instruite: jocuri cu reguli transmise prin tradiție, cu reguli inventate, spontane și protocolare.
- VI. După competențele psihologice stimulate: jocuri de mișcare, de observație, de imaginație, de atenție, de memorie, de gândire, de limbaj și de creație.

2. Copiii cu cerințe educative speciale

În cele ce urmează, ne vom referi la beneficiile jocului didactic pentru copiii cu cerințe educative speciale. Folosirea jocului didactic ca o completare a activității la clasă aduce variație în procesul de instruire a acestor copii.

Relevând legăturile dintre joc și munca copilului, Jean Piaget a pus în evidență aportul jocului la dezvoltarea intelectuală a școlarului. De aceea el susține că: "toate metodele de educare active a copiilor cu nevoi speciale să furnizeze acestora un material corespunzător pentru ca jucându-se, ei să reușească să asimileze realități intelectuale care, fără acestea, rămân exterioare inteligenței copilului".

Prin joc, copiii cu nevoi speciale pot ajunge la descoperire de adevăruri, își pot antrena capacitatea lor de a acționa creativ, pentru că strategiile jocului sunt, de fapt, strategii euristice, în care se pot manifesta spontaneitatea, inventivitatea, răbdarea, îndrăzneala.

Jocurile didactice de la ora de matematică pot deveni metode de instruire, în cazul în care ele sunt foarte bine organizate. În acest caz, intenția principală a jocului este învățarea care pregătește copilul pentru muncă și viață. Pentru a atinge aceste scopuri, jocurile trebuie să fie interactive. Scopul educației prin joc este acela de a forma anumite deprinderi, atitudini și comportamente; acestea se pot forma doar dacă elevul este implicat efectiv în desfășurarea jocului, atât pe plan verbal cât și motric. În acest sens Skinner ([1]) spune că "nu întărim pronunția corectă a elevului pedepsindu-l pentru că a greșit, nici mișcările abile pedepsindu-l pentru neîndemânare. Nu-l facem pe elev harnic, pedepsindu-l pentru lene; curajos -pedepsindu-l pentru indiferență. Nu-l învățăm să studieze repede pedepsindu-l pentru încetineală, nici să țină minte, pedepsindu-l că uită; nici să judece corect, pedepsindu-l pentru lipsa de logică. În aceste condiții i se va întâmpla doar uneori să descopere cum e să fii uneori atent, muncitor, curajos, cum să țină minte și cum să judece. Instruirea nu va avea nici o contribuție aici, fiind inexistentă. Indiferent de vârstă, elevul are sentimentul demnității personale, orice încercare de a-l umili, mai ales în prezența colegilor săi, va avea rezultate nedorite. Copilul cu cerințe educative speciale fie că se retrage în sine, refuzând să comunice, fie că reacționează violent la frustrare."

Jena, rușinea, umilirea repetată, tind să dezorganizeze personalitatea copilului, duc la apariția unei stări psihice negative de nesiguranță, ezitare, pierderea respectului de sine și a încrederii în profesor.

În cazuri extreme, elevul poate deveni chiar agresiv. Se întâmplă adesea ca elevul frustrat să fie izolat în grupul de elevi, deoarece reactivitatea lui exagerată din cauza frustrării repetate se manifestă printr-un comportament inadaptat, elevul fiind văzut de colegi ca un tip dificil. De aceea, jocul poate fi folosit pentru a diagnostica conflicte psihologice, fiind binecunoscută capacitatea jocului de a deveni simbol al tendințelor, dorințelor sau conflictelor copilului.

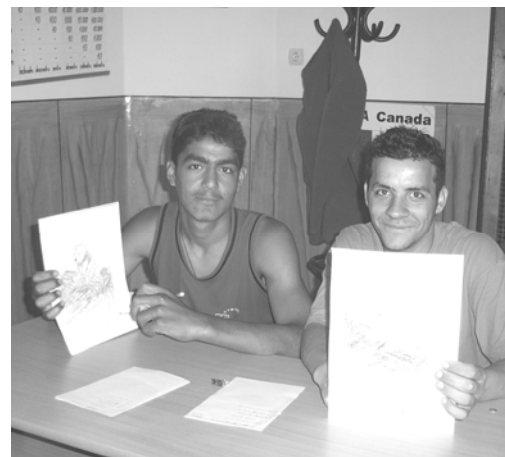
Formele de joc au menirea să intercepteze tulburările de comportamente ce pot fi declanșate de inhibirea instinctelor, cerută de societate. Terapia prin joc are la bază efectul armonizator; din aceasta cauză, jocul terapeutic a fost numit "o pace încheiată cu sine și între ceilalți".

Armonizarea realizată cu ajutorul jocului se manifestă sub forma unei concordanțe subiective între dorință și propriile posibilități. Datorită acesteia, copilul găsește în joc un răspuns pozitiv la încercările sale mascate de a fi înțeleș și o confirmare a sentimentului propriei valori.

Jucandu-se cu cifrele, la ora de matematica, elevul cu cerințe educative speciale reacționează pozitiv și participă la activitățile clasei. Câteva exemple de jocuri pot fi: "Unește cifrele și spune ce obții"; "Calculăm și colorăm"; "Rebus matematic"; "Descoperă cuvântul cheie".

Jocul nu urmărește evidențierea deficienței și a blocajului copilului. O asemenea abordare exclude teza caracterului irecuperabil al copilului cu cerințe educative speciale. Elementele de joc încorporate în procesul de predare-evaluare pot fi motive și pot stimula puternic acest proces în toate formele lui.

În final, prezentăm câteva imagini de la „Concursul de matematică și perspicacitate”, la care au participat școlile "George Barițiu" și "Ioan Bococi" din Oradea.



Bibliografie

- [1] Skinner, B.F., *Beyond Freedom and Dignity*. New York: Knopf, 1971
- [2] Perelman I.(1964), *Algebra distractivă*, Editura Științifică, 1964

ON THE INFLUENCE OF THE TYPE OF EXAMS ON THE PERFORMANCE OF STUDENTS

Mario LEFEBVRE

Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal
C.P. 6079, Succursale Centre-ville
Montréal, Québec H3C 3A7, Canada
mlefebvre@polymtl.ca

Abstract. We analyse the results obtained by engineering students in a probability course over a 10-year period. During this time period, essay exams, multiple choice exams, and sometimes part essay and part multiple choice exams were used to evaluate the students. We are interested in the average obtained by the students, the percentage of A's, and the percentage of students who failed the course.

1. Introduction

A very important part of a teacher's work is to assess the students' levels of understanding of the subject they are learning. In mathematics, this assessment generally takes the form of assignments and written exams. In more advance courses, in particular at the graduate level, the exams are almost always of the *traditional* type; that is, they are essay exams in which the students must write a complete answer to each question, and each step of the solutions provided by the students must be justified. In basic courses, it is more frequent to see multiple choice exams, and/or exams containing questions of the true/false variety. This is popular in medical education.

Many papers have been written on the use of multiple choice exams (see, for example, Bruno and Dirkzwager (1995), Hansen and Dexter (1997), Scott *et al.* (2006), Bolboacă and Jäntschi (2007), and the references therein). Some papers consider the problem of constructing good multiple choice tests, while others try to determine whether this type of exams enables the teacher to grade the students efficiently and fairly.

The author has used both essay and multiple choice exams, and sometimes a mixture of both varieties, in a basic course on probability theory taken primarily by electrical engineering students. The course was given, without major modifications, from 1993 to 2003. During the first years of the period considered, the exams were of the traditional type. Then, a mixture of *open* and multiple choice questions was used. Finally, from the summer of 1999, the exams contained only multiple choice questions.

The probability course was offered each term, that is, during the fall, winter and summer terms. At first, it was taken only by electrical engineering students, and there

were one or two groups per term. However, in the fall of 2000, the number of students increased greatly, as physical engineering and computer engineering students also took the course. The number of groups per term was at least equal to three, with a maximum of five groups in the fall of 2001. Therefore, there were many lecturers teaching the course, including graduate students and people from outside the university, whereas during the first years, the author was the only teacher.

The reasons for introducing multiple choice questions in the exams are numerous. Maybe the most important one is that, as probably most people teaching at École Polytechnique would agree, many students content themselves with having the general idea of the solution to a problem. They don't feel the need to obtain the exact answer. They consider numerical mistakes as of little significance, even though doing the calculations right should actually be viewed as essential (for example, in the case of civil engineers building bridges).

Moreover, in the case of traditional exams, the number of students who complain that the mark they received is unfair is often quite large. Some students consider that they must receive some marks for having attempted to solve the problems, even if in reality their work is worthless. With multiple choice exams, this problem disappears entirely.

Next, if among the various answers proposed to the students we sometimes include some that correspond to well-known mistakes, then those who make such mistakes should learn to avoid them in the future.

Another advantage that can be seen in the use of multiple choice exams is that the teacher can mark the exams objectively. Sometimes, especially when the number of students in the group is small and the teacher knows every student by name, it is difficult to disregard the fact, when marking the exams, that he (or she) knows that a certain student works really hard, but does not understand much.

When there are many groups, with different teachers, multiple choice exams prevent some of them from marking their own students more generously (this happens frequently with traditional exams). Also, some teachers are known to *leak* the questions to their students, which is much more apparent if the exam is of the multiple choice type.

Finally, which must of course not be neglected, the time needed to mark multiple choice exams is considerably shorter than in the case of traditional exams. However, multiple choice exams are longer to prepare. Therefore, if the size of the class is small, the amount of time saved by using multiple choice exams is not very large.

As far as the students are concerned, in many universities they consider multiple choice exams as easier, because they think that they can determine, or guess, which is the correct answer among those proposed. At Polytechnique, most students didn't like this type of exams, probably because the results they obtained were not good (as will be seen in Section 3), and also because of the mentality that prevails here that they must be rewarded for having written *something*. A positive point for them is that they don't have to write complete and detailed solutions, which is time consuming and also more difficult for foreign students who don't master the language very well.

In Section 2, the exact form of the multiple choice exams used in the probability course considered will be described. The results obtained by the students over the 1993-2003 time period will be presented and analyzed in Section 3. Finally, some conclusions will be drawn in the last section of the paper.

2. Description of the multiple choice exams

All the questions given in exams in the probability course considered can be found in the book *Cours et exercices de probabilités appliquées* (2003), or in its English version *Applied probability and statistics* (2006). For every question posed to the students, five answers were proposed. All of them were possible. In order to keep the students from guessing the right answers, each question was worth two marks, and in case of a wrong answer, the student received $-\frac{1}{2}$ mark (and, of course, zero marks if a question was left unanswered). This way, a student who answers totally at random should get, on average, zero marks. Indeed, if X_n is the mark obtained for question no. n , then the *mathematical expectation* of X_n is given by

$$E[X_n] = \frac{1}{5} \times 2 + \frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

The fact of having negative marks tends to lower the average total mark obtained by the students. However, at École Polytechnique, a system of letter grades is used. The teacher must set the thresholds for the D and A grades (traditionally 10/20 for a D and 16/20 for an A), and the interval between D and A is divided in three to set the thresholds for the letters C and B (generally 12/20 and 14/20). Because of this grading system, the teacher can decide to lower the thresholds in order to take into account the possibility of receiving negative grades.

Remark. In the fall of 1996, the letters D^+ , C^+ and B^+ , as well as A^* , were introduced. If 10/20 (respectively 16/20) is the threshold for a D (resp. an A), then the thresholds for D^+ , C^+ and B^+ are respectively 11/20, 13/20 and 15/20. The threshold for an A^* is set independently of the other thresholds.

At first, all negative marks were subtracted from the positive ones when the total mark obtained by a student was calculated. On a few occasions, this total was actually negative! Hence, these students did worse (on average) than somebody who would have guessed all the answers... After a few terms, a maximum number of wrong answers were retained (typically 4 wrong answers when there were at least 10 questions).

As is often the case when multiple choice exams are used, there was generally the possibility to drop at least one question and still get the maximum mark. For example, there could be 11 questions worth 2 marks each, and the maximum mark was 20.

Having many not too long questions allows the teacher to cover more material in the exams. Moreover, the questions are most often *independent*, so that a student who didn't understand a question could skip it without being too penalized. In traditional exams, there are generally fewer questions, and some questions may be multi-part. Therefore, not being able to even begin to solve such a question has strongly negative effects on the student's final mark.

The five answers proposed sometimes contained the ones that correspond to *classic* errors made by the students. For example, if X is a random variable that follows a Gaussian distribution with parameters μ and σ^2 [denoted by $N(\mu, \sigma^2)$], then the probability that X takes on a value smaller than or equal to x is given by

$$P[X \leq x] = P\left[N(0,1) \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right].$$

Many students make the mistake of dividing $(x - \mu)$ by σ^2 , rather than by σ . So, occasionally the answer obtained by making this mistake was proposed. This strategy should not be used with every question, because the exam would be too difficult.

When the answer to a question of the type: *calculate the probability that ...* was a number, for instance 0,9508, then we quite often proposed answers like

a) 0,9408; b) 0,9508; c) 0,9608; d) 0,9708; e) 0,9808.

The various answers were placed in increasing order. These answers should not be so close to one another that the way a student rounded his calculations could influence his choice. When the four wrong answers are chosen in this way, a good student who made a small mistake in his calculations should be able to correct his mistake when he realizes that he did not obtain any of the proposed answers. Moreover, with five options in a small interval, the students had a least an idea of the size of the answer.

The option *none of the above* was used, but not too often. In the questions having this possibility among the proposed answers, the students were generally not very successful. Similarly, sometimes we gave, for example, three *events* and we asked which among the three possible pairs were *independent*, and/or which were *mutually exclusive*. These questions were considered as quite difficult.

With multiple choice exams, one must avoid asking very difficult questions, because if all questions are worth the same amount of marks (which is very often the case), a student who guesses right the answer to such a question is unfairly favored. In the case of traditional exams, the teacher can ask more difficult questions (or parts of questions) that are not worth many marks, but enable him/her to find out who is really very good, and not only *quite* good. However, since 16/20 is almost always sufficient to get an A, the students don't have to solve these difficult questions to obtain the maximum letter grade.

In the next section, we will present and analyze the results obtained by the students in the probability course.

3. Analysis of the results

During the time period 1993-2003, the course on probability theory considered in this paper was given over 25 terms by the author. Eight times, the exams contained only essay questions, 11 times they contained only multiple choice questions, and 6 times there was a mixture of questions.

At Polytechnique, a 4-point grading system is used to determine a student's average. An A (or an A*) is worth 4 points, while B⁺, B, C⁺, C, D⁺ and D are worth respectively 3½, 3, 2½, 2, 1½ and 1 point(s). The results obtained by the students between 1993 and 2003 are summarized in Table 1.

Table 1. Summary of the performance of the students between 1993 and 2003.

Type of exams	No. of terms	Average	% of A's	% of F's
Traditional	8	1,75	13,1	23,2
Mixture	6	1,38	9,2	36,3
Multiple choice	11	1,42	6,5	31,5

In order to draw sound conclusions from the data presented in Table 1, we will perform statistical tests. These tests assume that the underlying random variables have a Gaussian (or *normal*) distribution. Because the number of data points is not very large, we first tested the hypothesis that the nine random variables under consideration (namely, from the average obtained when the exams are of the traditional type to the percentage of failures (i.e. F's) when they are of the multiple choice type) indeed follow (at least approximately) a Gaussian distribution. To do so, we used the Anderson-Darling normality test available with the statistical software *MINITAB*. In each case, we found that we could not reject normality. Hence, we can use the tests that compare the means of Gaussian random variables.

Remark. When the number of observations is large (at least 30), the assumption of normality is not really needed, because of the *central limit theorem* (see Lefebvre, 2005).

We compared the means of the three pairs of variables for each item considered (average, percentage of A's and of F's) to determine whether they are (statistically) *significantly* different. The statistical procedure is called a *two-sample t test*. We performed all tests at the 5% significance level, which is a standard value in statistics. It means that there is a 5% chance (that is, risk) that we conclude that the means of the two random variables tested are significantly different, while in fact they are not. Actually, *MINITAB* provides what is known as the p -value of the tests. If this p -value is smaller than (according to our criterion) 5%, then we can state that the two means are significantly different.

First, in the case of the average obtained by the students, we find that there is a significant difference between the average with traditional exams as compared to multiple choice exams or a mixture of both types. However, the difference between the students' performance when the exams were of the multiple choice type or a mixture of traditional and multiple choice exams is not statistically significant.

Next, we turned to the percentage of A's. This time, the only statistically significant difference is between the percentage of A's when traditional as compared to multiple choice exams were used.

Remark. One might think that 13,1% and 9,2% of A's is quite different. However, because the sample sizes are small, and (especially) because there is a rather large *variance* in the observations, this difference is far from being statistically significant (the p -value is equal to 0,212).

Finally, we considered what is perhaps the most important variable (as far as the students and also the administration are concerned), namely the percentage of failures. From the data that we collected, we can state that there were significantly more students who failed the course when the exams were of the multiple choice type, or a mixture of traditional and multiple choice exams. However, the percentages of F's are not significantly different when we compare multiple choice exams and a mixture of the two types.

4. Conclusions

Based on the results presented in the previous section, we are tempted to conclude that the use of multiple choice exams had the effect of decreasing the students' performance in the probability course. However, one must be careful. Notice that, actually, the lowest average obtained by the students was when a mixture of essay and multiple choice questions was used, though the difference between this average and the one when only multiple choice questions were proposed to the students is not statistically significant (as seen in Section 3). In fact, the p -value in the case of this comparison is equal to 0,813. Therefore, it is safe to say that a mixture of essay and multiple choice questions, and only multiple choice questions produced practically the same average.

What seems to be more certain is that the percentage of A's depends on the type of exams during the term, although the differences were not statistically significant in two of the three tests performed.

There are other factors that could explain the differences in the results that were observed. Most experienced teachers agree on the fact that the students who arrive at Polytechnique seem to be less well prepared than they used to be. This fact alone could explain why the averages were lower in the second part of the 10-year period considered. Naturally, some teachers lower the level of their course to compensate this lack of preparation, but this was not the case in the probability course under investigation.

The fact that there were many more students taking the course when all the exams were of the multiple choice type must also be taken into account. Many of these students were from a department (especially computer engineering) that did not use much the material covered in the probability course; hence, they were perhaps less motivated, whereas at first the electrical engineering students taking the course knew that they would use the concepts they learned in probability elsewhere. On the other hand, among the *new* students were those from physical engineering, who are considered to be the best ones at Polytechnique. However, they were not very numerous.

Next, when there were many groups, there were also various teachers. We considered the results obtained by the groups whose teacher was the author of this paper, and they were relatively different from the ones presented in Section 3, although the drop in the percentage of A's was also obvious.

One thing that did not appear in the summary of the students' performance presented in Section 3 is that with multiple choice exams, the variance of the students' results generally increases quite a lot. Indeed, instead of failing the course with, say, a 40% average, many students failed with a 20% average. This is due to the fact that they did not receive marks only for their *efforts*. Conversely, really very good students often obtained almost 100% in the course when multiple choice exams were used, because they could correct their mistakes when they realized that the answers they got were not among the options proposed.

In conclusion, it is the author's opinion that multiple choice exams are valid to assess the students' understanding. Actually, the results obtained when this type of exams is used might well give a *truer* value of the students' understanding, which could explain the drop in their performance.

Multiple choice exams may not be appropriate for every course. For instance, in differential equations, if we propose five solutions to a certain equation, the students

could check which one does indeed satisfy the equation (by differentiating), so that we could not know whether they would have been able to solve it themselves. Probability theory is perhaps the course that is most suited to multiple choice exams.

Finally, one must mention certain drawbacks associated with multiple choice exams. The risk of plagiarism is significantly increased, so that the number of people watching the students during the exams should be sufficient. Also, there is always the risk that a given student will be overly lucky (or unlucky) when writing such exams.

References

- [1] Bolboacă, S.-D., Jäntschi, L., *Computer-based testing on physical chemistry topic: A case study*, International Journal of Education and Development using Information and Communication Technology **3** (2007), pp. 94-104.
- [2] Bruno, J. E., Dirkwager, A., *Determining the optimal number of alternatives to a multiple-choice test item: An information theoretic perspective*, Educational & Psychological Measurement **55** (1995), pp. 959-966.
- [3] Hansen, J. D., Dexter, L., *Quality multiple-choice test questions: item-writing guidelines and an analysis of auditing testbanks*, Journal of Education for Business **73** (1997), pp. 94-97.
- [4] Lefebvre, M., *Cours et exercices de probabilités appliquées*, 2^e Ed., Presses internationales Polytechnique, Montréal, 2003.
- [5] Lefebvre, M., *Applied Probability and Statistics*, Springer, New York, 2006.
- [6] Scott, M., Stelzer, T., Gladding, G., *Evaluating multiple-choice exams in large introductory physics courses*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research **2** (2006), 020102. DOI: [10.1103/PhysRevSTPER.2.020102](https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.2.020102).

METODE MODERNE ȘI METODE TRADIȚIONALE ÎN EVALUAREA LA MATEMATICĂ

TRADITION AND MODERN IN EVALUATION IN MATHEMATICS

Consuela Luiza VOICA

Școala nr.12, București
consuelavoica@yahoo.com

Maria ANGHELUȚĂ

Școala nr.186 "Elena Văcărescu" București
anghelutamaria@yahoo.com

Abstract. Comparing curricular objectives with evaluation objectives, as a starting point, we present traditional and modern evaluation methods in mathematics. We make a critical analysis concerning the proposed problems in high school tests.

Motto

"Arta supremă a profesorului este de a trezi bucuria exprimării creatoare și bucuria cunoașterii".
Albert Einstein

1. Introducere

Ce evaluăm? Cum evaluăm? Cât de eficiente sunt metodele de evaluare aplicate la clasă? Iată câteva întrebări care apar cu regularitate în discuțiile dintre profesori. Răspunsurile sunt însă dificil de găsit; acestea ar trebui să țină cont și de realitățile societății contemporane.

Angajatorii par să fie mai interesați de experiența de învățare, de stilul de lucru al solicitantului, de abilitatea acestuia de a rezolva probleme sau chiar de ușurința de a face un rezumat, decât de media de absolvire a unei forme de învățământ. De aceea, școala ar trebui să ofere elevilor experiențe de învățare incitante, să dezvolte capacitatea de rezolvare a problemelor, să permită elevilor accesul la surse de informare variate, pe baza cărora elevii să poată dezbate în grupuri de lucru teme interdisciplinare.

Nici matematica, privită ca obiect de studiu în școală, nu poate rămâne departe de aceste deziderate. Pentru a forma însă la elevi competențe de tipul celor cerute de angajatori, este nevoie ca și evaluarea să fie făcută într-o manieră adecvată.

Procesul de evaluare are implicații social-morale importante vizând relațiile complexe între cadre didactice, elevi, părinți și comunitatea locală. De aceea, evaluarea nu se poate face la întâmplare. Există o deontologie a evaluării, bazată pe un set de valori de referință, considerate esențiale pentru procesul de evaluare. Acestea pot fi importante pentru evaluator, pentru elevul evaluat, sau pentru procesul de evaluare ca atare. [2]

Evaluarea nu înseamnă numai a verifica, a cuantifica, a nota, pe baza unor criterii prestabilite. O radiografie a evaluării realizată de Alain Kerlan [3] pornește de la ideea că evaluarea trebuie să răspundă la întrebările:

- pentru ce se face evaluarea? (funcțiile evaluării)
- în raport cu ce se face evaluarea? (criterii)
- pentru cine se face evaluarea? (destinatarii)
- ce și cum se evaluează (conținuturi, deprinderi, atitudini, nivelul de atingere al obiectivelor și instrumente de evaluare)

2. Tipuri de evaluare

Există diverse clasificări ale metodelor, formelor și tipurilor de evaluare. Evaluarea se realizează în trei pași: evaluarea inițială, evaluarea pe parcursul procesului didactic și evaluarea finală, de bilanț. În studiul nostru, pornim de la următoarele premise în utilizarea metodelor de evaluare:

- alternarea metodelor tradiționale cu metodele de evaluare complementare;
- utilizarea metodelor în strânsă legătură cu obiectivele educaționale vizate și în acord cu tipul de rezultate ale învățării/ natura achizițiilor (competențelor și cunoștințelor) ce se doresc a fi surprinse;
- metodele utilizate trebuie să ofere informații relevante cu privire la nivelul de pregătire a elevilor, și, implicit, cu privire la calitatea procesului de învățare.

3. Proiectarea probelor scrise

Evaluarea folosește diverse tipuri de sarcini de lucru, numite uneori probleme, altele itemi. În aprecierea prin notă a rezolvării de către elev a itemului, corectorul poate fi uneori subiectiv. Există însă și itemi care nu lasă loc unor interpretări personale. De aceea, itemii pot fi clasificați în: obiectivi, semiobiectivi și subiectivi.

Ne vom referi, în cele ce urmează, la proba scrisă de evaluare din *Anexa 1*, probă ce conține diverse tipuri de itemi. Mai precis, în această probă de evaluare apar: itemi semiobiectivi cu răspuns scurt (ex. 1 și 2), itemi obiectivi cu alegere multiplă (ex. 3,4,5) și itemi de tip pereche (ex. 6), itemi subiectivi care solicită răspunsuri deschise, de tip rezolvare de probleme (7) și itemi structurați constituiți într-un set de întrebări care au în comun un element sau se referă la același concept (ex.8).

Menționăm aici faptul că enunțurile itemilor de evaluare trebuie să fie formulate cu mare grijă. De exemplu, dacă enunțul itemului 1 ar fi formulat astfel: „media aritmetică a numerelor 2,4 și 4,6 este....”, un elev ar putea răspunde 3,5, sau $\frac{2,4 + 4,6}{2}$ sau „număr

zecimal”, sau $\frac{7}{2}$. Observăm că oricare din aceste răspunsuri este corect! Aceasta arată că formularea itemilor semiobiectivi sau subiectivi este foarte importantă, pentru ca evaluarea să fie cât mai corectă.

De multe ori profesorii se bazează pe un “contract didactic”, adică se așteaptă ca elevii lor să răspundă într-un anumit fel la întrebările adresate. În exemplul anterior răspunsul așteptat este 3,5. Unii elevi însă, din diverse motive, dau un alt răspuns care se dovedește a fi corect în urma analizei întregului context.

În momentul realizării unor lucrări scrise, o atenție deosebită trebuie acordată numărului și gradului de dificultate al itemilor, precum și *relevanței* acestora în raport cu obiectivele ce urmează a fi evaluate. Pentru a avea o privire de ansamblu asupra subiectelor propuse, este utilă alcătuirea unei *matrice de specificații*.

Matricea de specificații este un tabel cu linii și coloane, ce conține informații despre conținuturile ce urmează să fie evaluate și stadiile de aplicabilitate ale acestora. Pentru fiecare conținut în parte, se asociază nivelul cognitiv la care dorim să măsurăm aceste conținuturi. ([4], ([5])). De exemplu, matricea de specificații corespunzătoare testului din anexa 1, este următoarea:

<i>Conținutul</i>	<i>achiziții</i>	<i>înțelegere</i>	<i>aplicare</i>	<i>probleme</i>	<i>Total</i>
Calculul cu numere reale	1		3		4
Calculul de arii și perimetre	2				2
Rezolvarea și redactarea unei probleme		1	1	1	3
Aflarea unor lungimi utilizând funcții trigonometrice și relații metrice	1		1	2	4
Construcția unei figuri geometrice și a unei linii importante	1				1
	35,71%	7,14%	35,71%	21,43%	100%

O altă etapă importantă în elaborarea probei scrise este proiectarea baremului de corectare. La același test, profesori diferiți pot proiecta bareme diferite, alocând punctaje variate aceluiași item, în funcție de experiențe didactice, subiectivismul evaluatorului și nivelului clasei căreia îi este adresat testul.

Baremul de corectare atașat testului din *anexa 1* este adaptat tipului de itemi utilizați. Primii patru itemi se rezolvă prin aplicarea directă a algoritmilor de calcul, reflectând nivelurile achiziție și înțelegere, asigură elevului note de nivel 5-6. Următorii patru itemi presupun o înțelegere superioară a noțiunilor, integrarea lor în contextul unei probleme, redactarea rezolvării, analizarea soluțiilor. Punctajul pentru achiziții (recunoașterea unei formule) și înțelegere (selectarea formulei potrivite) este mai mic decât punctajul acordat pentru finalizarea rezolvării. La itemii tip problemă baremul trebuie fragmentat în funcție de operațiile ce conduc la finalizarea rezolvării

Avantajele acestui tip de barem constau în timpul redus de corectare, reducerea subiectivismului în apreciere, posibilitatea acordării unui procent din punctaj conform etapelor rezolvate corect, identificarea elevilor cu potențial care finalizează sarcinile de lucru în manieră personală. Dezavantajul acestui tip de barem constă în aplicarea lui la clase diferite ca nivel de cunoștințe. Testul propus este un exemplu care a dat rezultate bune la o clasă cu elevi competitivi și rezultate nesatisfăcătoare la o clasă cu mai mulți elevi dezinteresați. De aici tendința profesorului de a fi mai exigent cu elevii performanți și mai tolerant cu elevii cu posibilități reduse de învățare.

4. Metodele complementare de evaluare

Referatul, investigația, proiectul, portofoliul, autoevaluarea, sunt considerate metode complementare de evaluare. Dintre aceste metode ne vom opri la *portofoliu*. *Portofoliul* a fost definit de către Roegiers Xavier [6] ca „dosar elaborat de către elev (grup de elevi), ce cuprinde în mod esențial un ansamblu de documente produse și elaborate personal de către el (ei), constând în: probleme, eseuri, schițe, contribuții mai mult sau mai puțin reușite. În mod secundar, dosarul poate să cuprindă documente care nu sunt produse personale, dar pe care elevul le-a selecționat în funcție de utilitatea lor în învățările sale (o grilă de autoevaluare, o schemă, o sinteză, o hartă conceptuală, formule). Aceste documente sunt prezentate într-o manieră structurată și organizată”.

Așadar, un portofoliu poate cuprinde lucrările pe care le face elevul individual sau în grup, rezumate, eseuri, articole, referate, comunicări, fișe individuale de studiu, experimente, înregistrări, fotografii care reflectă activitatea desfășurată de elev individual sau împreună cu colegii săi, reflecțiile proprii ale elevului asupra a ceea ce lucrează, autoevaluări scrise de elev sau de membrii grupului, hărți cognitive, comentarii suplimentare și evaluări ale cadrului didactic, ale altor grupuri de elevi sau chiar părinți. Prin elementele pe care le conține, *portofoliul poate fi suport al învățării* [2] determinând

astfel mobilizarea cognitivă (susținută de unele produse realizate de elev, cum sunt exerciții și probleme rezolvate de el, compuneri, sinteze sau planuri de învățare structurate și elaborate de el), mobilizarea metacognitivă (susținută de produse cum sunt grilele de autoevaluare, comentarii personale, reflecții asupra unor procedee și tehnici de lucru pe care le utilizează în învățare) și mobilizarea afectivă (susținută prin referirea la progresele pe care le-a făcut elevul, la unele exemple care îi sunt deosebit de evidente, la unele creații originale pe care el le-a realizat, la unele produse referitoare la trecutul său personal).

Un portofoliu reprezintă însă, în primul rând, o „carte de vizită” a elevului, prin care diverși factori educaționali (cadre didactice, părinți, societate) pot să-i urmărească progresul, de-a lungul unui interval mai lung de timp. De aceea, *portofoliul este și un instrument pentru validarea achizițiilor*.

Această metodă are și limite, printre care amintim: nu toate competențele sunt evaluabile prin intermediul portofoliului; se pune un accent deosebit pe abilitățile și forma de prezentare și necesită alocarea unui timp mai mare din partea elevilor pentru elaborare și din partea profesorului în evaluare. În pofida acestor neajunsuri, portofoliul este un instrument alternativ de evaluare pe care cadrele didactice trebuie să-l utilizeze ori de câte ori contextele de instruire facilitează evaluarea printr-o astfel de modalitate.

De exemplu portofoliul întocmit la matematică de elevii clasei a VI-a de la Școala cu clasele I-VIII Nr.12, București, în anul școlar 2007-2008, a conținut: triumfiuri din hârtie pe care sunt trasate liniile importante (mediane, bisectoare, înălțimi, mediatoare); un eseu cu tema „ Ce m-ar determina să învăț mai mult la matematică? ”; cele mai bune două lucrări de control ale elevului; fișe conținând definițiile, enunțurile și formulele de geometrie; hărți conceptuale.

Evaluarea portofoliului presupune realizarea unei grile conținând criterii privind cantitatea, calitatea și originalitatea pieselor portofoliului. [7] Grila de evaluare trebuie comunicată elevului pentru a-și putea face singur autoevaluarea portofoliului.

Suntem de părere că realizarea unei evaluări cât mai corecte a elevilor duce la progresul real în educație. De aceea susținem că are o mare importanță alternarea metodelor tradiționale cu metodele de evaluare complementare, utilizarea metodelor de evaluare în strânsă legătură cu obiectivele educaționale vizate și în acord cu tipul de rezultate ale învățării și utilizarea metodelor adecvate care să ofere informații relevante cu privire la nivelul de pregătire a elevilor, și, implicit, cu privire la calitatea procesului de învățare.

Bibliografie

- [1] M. Singer (coord.), *Ghid metodologic pentru aplicarea programelor de matematică, primar-gimnaziu*, MEC, CNC, 2001
- [2] ***, *Programul Național de Dezvoltare a competențelor de evaluare ale cadrelor didactice DeCeE. Suport de curs*, CNCEIP 2008
- [3] Alain Kerlan, *Evaluer pour former*, Rencontres pédagogiques, Paris, INRP, 1988
- [4] Stoica, A. (coord.), *Evaluarea curentă și examenele. Ghid pentru profesori*, Ed. ProGnosi București, 2001
- [5] Stoica, A. *Evaluarea progresului școlar de la teorie la practică*, Editura Humanitas Educațional, București, 2007
- [6] Roegiers Xavier, *Une pédagogie de l'intégration: Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*. Bruxelles, 2004
- [7] Dragomir M., *Managementul activităților didactice – eficiență și calitate*, Editura Eurodidact, Cluj-Napoca, 2002

Anexa 1

- A. La subiectele 1-2 scrie pe foaia de răspunsuri doar rezultatul:
1. Rezultatul calculului $-12 + 9$ este 5p
 2. Valoarea mediei aritmetice a numerelor 2,4 și 4,6 este.... 5p
- B. La subiectele 3-5 alege varianta corectă și scrie litera corespunzătoare ei pe foaia de răspunsuri:
3. Calculând $(1 - \sqrt{2})^2$ se obtine : 10p
 - a) $-1 - 2\sqrt{2}$
 - b) $5 - 2\sqrt{2}$
 - c) $3 - 2\sqrt{2}$
 - d) $3 + 2\sqrt{2}$
 4. Numărul $\frac{2}{7}$ este soluție a ecuației: 10p
 - a) $2x-7=0$
 - b) $7x+3=5$
 - c) $7x+2=0$
 - d) $9x-3=2x$
 5. Un dreptunghi are lățimea de 6 cm și lungimea de 8 cm. Diagonala lui are: 10p
 - a. 14 cm
 - b. 50 cm
 - c. 48 cm
 - d. 10 cm
 6. Formează perechi de tipul (a; 1) între elementele din coloana A și formulele sau valorile corespunzătoare din coloana B. Scrie pe foaia de răspunsuri perechile obținute. 20p

Coloana A	Coloana B
a) $\sin 60^\circ$	1) 1
b) <i>aria rombului</i>	2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) <i>inaltimea triunghiului echilateral</i>	3) <i>baza · inaltimea</i>
d) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$	4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	5) $\frac{\text{latura} \cdot \sqrt{3}}{2}$

- C. La subiectele 7-8 scrie rezolvarea completă :
7. a) Calculează: $\sqrt{75} - (2 - \sqrt{3})^2 + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$ 7p
 - b) Suma dintre jumătatea numărului x și sfertul numărului y este 25. Să se afle numerele dacă diferența dintre x și y este 20. 8p
 8. Fie trapezul dreptunghic ABCD (AB //CD) cu $m(\angle B)=60^\circ$. Dacă $AB - CD = 12$ cm și $AC \perp BC$, atunci:
 - a) Desenează trapezul dreptunghic ABCD.
 - b) Află aria triunghiului ABC .
 - c) Calculează perimetrul trapezului 15p

Anexa 2

Lucrare scrisă la matematică, clasa a V-a, semestrul II

1. Rezultatul calculului $2\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{11} + \frac{11}{15}$ este:
- a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{11}{6}$; c) $\frac{26}{15}$; d) $2\frac{12}{26}$. 10p
2. Valoarea numărului $7,25 + 10,17 : 3,6 = \dots\dots\dots$
10p
3. Aproximarea cu o zecime prin lipsă a numărului 13,4375 este.....
10p
4. Calculați exprimând rezultatul în unitatea de măsură specificată:
20p
- a) a) $21,5 \text{ dam} - 1427 \text{ cm} + 0,025 \text{ km} = \dots\dots\dots \text{ m}$
b) $12,4 \text{ m}^2 + 72350 \text{ dm}^2 - 0,0752 \text{ dam}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$
- 5) Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 75cm și lățimea de 3dm. El trebuie umplut cu apă până la înălțimea de 200 mm. Câți litri de apă sunt necesari? 10p
- 6) Un dreptunghi are lungimea de 18m și perimetrul de 50m. Calculați aria sa.
10p
- 7) Rezolvați ecuația: $5\frac{1}{3} + 1\frac{3}{5}x = 12\frac{17}{45}$. 10p
- 8) Rezolvați inecuația: $\frac{4}{5}x - 0,5 \leq 2,7, x \in \mathbb{N}$. 10p

BAREM DE REZOLVARE

1) c) ; 2) 10,075; 3) 13.4; 4) a) 225,73 m; b) 728,38 m²

5) $V = L \cdot l \cdot h$

5p

Finalizare $V = 45 \text{ dm}^3 = 45 \text{ l}$

5p

6) Formula perimetrului : $P = 2(L+l)$

2p

finalizare $l = 7 \text{ m}$

3p

Formula ariei : $A = L \cdot l$

2p

finalizare $A = 126 \text{ m}^2$

3p

7) Introducerea întregilor în fracție

3p

Scăderea termenilor

4p

Finalizare

3p

8) Transformare

2p

Adunarea termenilor

2p

Împărțirea termenilor

3p

Finalizare

3p

UTILIZAREA FOILOR DE CALCUL IN ȘCOLILE AMERICANE

SPREADSHEET IN AMERICAN SCHOOL

Nicoleta SĂMĂRESCU

Universitatea din Pitești,
Facultatea de Științe ale Educației,
nicoleta.samarescu@gmail.com

Abstract. Electronic tools are presented already from school. This paper presents step by step the way in which spreadsheets are used in American School. Spreadsheet contribute to enhancing understanding and developing creativity.

Keywords: spreadsheet, electronic tools

1. Introducere

Lucrarea prezintă pentru început etapele istorice ale dezvoltării foii de calcul urmate de modalitatea creativă de utilizare a lor în învățământul primar, chiar și preșcolar de pe Continentul American. Articolul prezintă și modul de manifestare al acestui fenomen de eLearning în cadrul școlilor românești.

2. Succint excurs istoric al foilor de calcul (spreadsheets)

În 1961, profesorul de la Universitatea Berkeley, Richard Mattessich a fost primul care a dezvoltat lucrul cu foile de calcul computerizate (spreadsheet) în cadrul programului Fortran IV; în 1978 Robert Frankston și Dan Bricklin au inventat VisiCalc, primele foi de calcul folosite pe computerul Apple II. VisiCalc a mers pe calculatoarele personale și putea calcula formule simple de matematică pentru care dădea răspunsul imediat. Mai târziu, în 1980, datele puteau fi transferate și în alte programe; în 1980-83 apare SuperCalc disponibil publicului larg. În anul 1983 a fost introdus Lotus 123 care identifica celulele după poziție (exemplu B9), iar în 1985 este prezentată o nouă versiune a programului Lotus 123. În 1987 noile programe cu foi de calcul ca Excel și Corel Quattro Pro au fost introduse, acestea având și capacitatea de a realiza grafice corespunzătoare datelor procesate. În 1995 după ce IBM a cumpărat Lotus, Excel devine lider pe piața foilor de calcul, putând să conțină de la 1 la 255 foi, urmând ca după anul 2000, numeroase firme de soft să dezvolte programe ce au la bază principiul foilor de calcul².

În 2001 programele ce foloseau foile de calcul (spreadsheet) și conțineau funcții avansate de calcul erau Excel, Appleworks, Filemaker și Corel Quattro Pro. Mai târziu au apărut foile de calcul și în cadrul unor programe ce pot fi liber downloadate, ca de

² Din *Histoire du tableur* a lui Michel Volle publicată la 3 august 2004

exemplu OpenOffice.org Calc. Evoluția foii de calcul nu se opreste aici, dovadă fiind proiectul GNOME în cadrul căruia din august 1997 până în septembrie 2008 GNOME a dezvoltat foaia de calcul ce poate importa acum fișiere în formate HTML, LaTeX, CSV.

În 2009, aceste foi de calcul stau la baza mai multor programe care pot să le transforme direct în pagini web sau să le introducă sub același format în alte programe. Sunt folosite chiar ca bază pentru produsele soft utile în cabinetele medicale, în biblioteci, în școli, sau sunt chiar pagini on-line în care membrii unei echipe de lucru pot completa simultan, pentru a nu mai transmite mesaje între ei, ceea ce ia foarte mult timp dacă grupul de lucru este foarte mare și pentru a observa imediat modificările anterioare.

3. Foile de calcul în Școala Americană

Consiliul Național al Profesorilor de Matematică ³ din U.S. și Canada au ca principiu faptul că "Tehnologia este esențială în predarea și învățarea matematicii. Ea influențează matematica, care este predată, și amplifică învățarea" (Learning&leading, p.24). Unul dintre instrumentele din eLearning prezentate în documentele acestui consiliu este foaia de calcul utilă în învățarea matematicii la nivel de gimnaziu sau chiar mai devreme. Margaret L. Niess, cercetătoare la Oregon State University, dă câteva exemple reprezentative de construire a învățării noțiunilor de algebră cu foile tabelare⁴. Cu ajutorul jocului educațional, elevul este motivat să învețe mai mult, să lucreze în echipă, să continue învățarea dincolo de clasă, să învețe din greșeli.

Lucrul cu Microsoft Excel, ca un instrument avansat de predare a matematicii, apare pe [numeroase](#) siteuri americane, unde sunt date diverse aplicații ce evidențiază lucrul cu metodele numerice și tehnicile interactive din foile de calcul. Numeroase exemple cu foi de calcul (exerciții matematice, crosspuzzle, etc.) sunt utilizate în învățământul primar din SUA, Canada și apar pe siteuri pentru profesori (www.thecanadianteacher.com, etc.). Aceste foi sunt construite astfel încât, dacă la un exercițiu este scris un răspuns greșit, acesta să apară cu altă culoare (de ex. roșu) sau să se modifice un icon, ceea ce asigură o atenționare și prin urmare reverificarea testului. Tot în siteurile acestea găsim lecții din diferite domenii utilizând alte proprietăți ale foilor de calcul (este realizat un tabel al vremii ce trebuie completat de elevi, un convertor din grade Celsius în grade Fahrenheit, un puzzle pentru noul cuvânt învățat, etc.).

Utilizarea foilor de calcul ca instrument eLearning are mai multe avantaje: organizarea și reorganizarea eficientă a informațiilor în procesul de predare-învățare, lasă profesorului mai mult timp pentru ascultare și chiar pentru discuții cu clasa, conceptele predate pot fi ilustrate prin imagini sau elemente multimedia, lectura este mai atractivă, nu ține profesorul ocupat cu scrisul pe tablă, poate fi folosit pentru stilurile de predare liniară sau ramificată. Limitele de utilizare ale acestui instrument: pierde din detalii, crearea unor lecții cu simboluri matematice ocupă mai mult timp, nu poate verifica un feedback creativ. eLearning conține instrumente ce se completează reciproc, instrumentele sunt ușor de folosit dar nu atât de ușor încât să realizezi ceva foarte bine.

³ NCTM-National Council of Teachers of Mathematics

⁴ Cel mai vechi joc de tip tabelar (pe hârtie) *magic square* este cel din China având o vechime de aproape cinci mii de ani (cca. 2800 î. Hr.), fiind format din trei linii și trei coloane.

În *Teachers' activities in technology-based mathematics lessons*, John Monaghan descrie cum s-a desfășurat un proiect de aplicare a noilor tehnologii în mai multe școli, cum au fost câteva zile de prezentare a instrumentelor (pentru școli-foile de calcul), cum alături de cercetători din universitate au explicat rolul profesorului în clasă.

În Madison Metropolitan School District (USA), *Joan Peebles* prezintă cum se utilizează foaia de calcul în grădiniță⁵. Este predat inițial conceptul de linie, coloană, adresă. Sunt așezate împreună mai multe linii pentru a identifica coloanele, colorează o matrice de 3 pe 3, li se cere să coloreze o anume celulă (A3 cu roșu, B9 cu glaben). În clasele primare, pentru că ei cunosc deja noțiunile de bază, li se cere să deseneze o stea în celula A7, un cerc în D8, un triunghi în E2, să mute desenul dintr-o căsuță (celulă, adresă) în alta, să introducă numărul de cărți (de silabe, vârsta) pentru fiecare elev și să facă graficul corespunzător. Pentru clasele mai mari se poate cere realizarea unui orar al unei zile (cât timp petrece la TV, pentru lecții, pentru școală, joacă, dormit) sau al unui proiect ecologic care să reprezinte consumul de apă al familiei pe săptămână în care să calculeze totalul, media aritmetică, să estimeze consumul pe o perioadă de un an. Și în Scoția folosesc în școli softuri precum foile de calcul, așa cum reiese din *Teacher and Computers for Secondary Mathematics* scrisă de Helen J. Forgasz. La Universitatea din Melbourne este realizat un studiu ce susține, prin declarațiile copiilor din școlile primare, utilitatea foilor de calcul⁶.

Fișele electronice animate, jocurile și softurile educaționale converg către o învățare cât mai plăcută, atractivă și chiar mult mai ușoară. Instrumentele electronice au numeroase avantaje: îl ajută pe profesor în realizarea rapidă de planșe atractive și personalizate, prin creșterea timpului de retenție; îi ajută pe elevi prin crearea unui climat de studiu plăcut cu ajutorul elementelor multimedia; oferă un feedback rapid prin care profesorul observă progresul făcut de elev; oferă o ghidare pentru parcurgerea materialului; duce la o acumulare mult mai rapidă și mai mare de informații; crește probabilitatea de îndeplinire a sarcinilor.

Pentru o cât mai mare eficiență a procesului educativ, prezența instrumentelor electronice, sub diverse forme, e-book, jocuri/softuri educaționale, platforme elearning, chiar forumuri, bloguri și universități virtuale, este mai mult decât necesară profesorilor, atât pentru informare, utilizare, organizarea informațiilor, cât și pentru crearea de noi surse personalizate. Instrumentele electronice permit crearea materialului didactic folosit direct, realizarea de lecții electronice și chiar laboratoare virtuale.

La nivel național, aplicațiile instrumentelor electronice în învățământul primar și gimnazial -precum foile de calcul- sunt puțin studiate și aplicate în procesul de predare-învățare. Unul din puținele studii în care găsim aceste aplicații este articolul *Predarea matematicii cu ajutorul calculatorului în cazul elevilor cu deficiențe de învățare*⁷ scris de Cristina Nenciu.

Modul de aplicare a unei foi de calcul în procesul didactic este cu atât mai puțin cunoscute la nivelul învățământului prescolar românesc și cu atât mai puțin aplicate. Trecând peste bariera dotării cu computere putem spune că popularitatea instrumentelor electronice este la un nivel minim, iar utilizarea aproape absentă, în timp ce în școlile din America se folosesc de la minifișele personalizate electronic până la

⁵ <http://danenet.wicip.org/mmsd-it/tlc/ssk-1.html>

⁶ Etudiant du premier cycle « *Je pense que le logiciel de calcul formel m'aide vraiment à apprendre de nouvelles choses (...)* » http://www.sharinginspiration.org/contribs/contrib_71/part_A/ STACEY_Sharing_Inspiration_FR.pdf

⁷ CNIV, ediția a V-a, 2007

numeroase tipuri de jocuri utile procesului educațional. De la sfârșitul anului 2008 sunt disponibile și în România telefoanele mobile cu programul numit Spreadsheet (foaie de calcul) realizat de Softalk.

4. Concluzii

Deoarece avantajele utilizării foilor de calcul sunt recunoscute și la nivel European, susținem activitățile didactice cu ajutorul lor. În Argeș, Olt și Vâlcea, în urma unei cercetări pe bază de chestionar 77% (eșantion n=120) din învățătorii activi au răspuns pozitiv lucrului cu aceste instrumente eLearning. Astfel, susținem aceste instrumente electronice deoarece sunt prezente pe toate calculatoarele și nu există un cost suplimentar; sunt dobândite odată cu pachetul Microsoft Office, sunt realizate feedback-uri cu actorii învățării de la orele de introducere în informatică, dar nesistematice; pot conține și elemente de animație (grafică, sonor, clipuri, texte, simboluri); reduc timpul de lucru al elevilor pentru realizarea temelor, a proiectelor de lecție pentru profesori; pot fi ușor transferate.

Bibliografie

- [1] John Monaghan, *Teachers' activities in technology-based mathematics lessons* în [International Journal of Computers for Mathematical Learning](#), Volume 9, Number 3, January 2004 , pp. 327-357(31), [Springer](#)
- [2] John E Baker, Stephen J Sugden. *Spreadsheets in Education–The First 25 Years*. eJSiE 1(1):18-43 (<http://epublications.bond.edu.au/ejsie>, accesat 2009)
- [3] Margaret L. Niess, *Learning & Leading with Technology*, Principles and Standards for School Mathematics, Volume 32 Number 5, 2005, *ISTE (International Society for Technology in Education)*, (www.iste.org., accesat 2009)
- [4] Nenciu Cristina, *Predarea matematicii cu ajutorul calculatorului în cazul elevilor cu deficiențe de învățare*, Conferința Națională de Învățământ Virtual, ediția a V-a, 2007
- [5] Sergei Abramovich, Eun Kyeong Cho. *On Mathematical Problem Posing by Elementary Pre-teachers: The Case of Spreadsheets* din *Spreadsheets in Education* (eJSiE), Volume 3, Issue 1 2008 Article 1 (<http://epublications.bond.edu.au/ejsie>, accesat 2009)
- [6] www.sabine12.la.us/class/excel-resources.htm, accesat 2009
- [7] www.cpearson.com/excel/topic.htm, accesat 2009
- [8] www2.warwick.ac.uk/services/ldc/resource/eguides/checklistppt/#good accesat 2009
- [9] http://www.sharinginspiration.org/contribs/contrib_71/part_A/STACEY_Sharing_Inspiration_FR.pdf, accesat 2009
- [10] http://www.sharinginspiration.org/contribs/contrib_71/part_A/STACEY_Sharing_Inspiration_FR.pdf, accesat 2009

EFICIENȚA FOLOSIRII SOFTURILOR EDUCAȚIONALE ÎN PROCESUL DE INSTRUIRE

THE EFFICIENCY OF EDUCATIONAL SOFTWARE IN THE TEACHING PROCESS

Andrei FLOREA

C.N. I.L. Caragiale, București
andrei_florea2000@yahoo.com

Corina SULTANA

C.N. I.L. Caragiale, București
sultana_corina@yahoo.com

Abstract. The paper was written in order to have a better, clearer image on the methods of using educational software. The emphasis is placed on the way in which the software programs can be used. The chosen software was addressed both gymnasium and highschool students.

1. Ce este un soft educațional?

O definiție generală este următoarea: *softul educațional reprezintă orice produs software în orice format ce poate fi utilizat pe orice calculator și care reprezintă un subiect, o temă, un experiment, o lecție, un curs, fiind o alternativă sau unica soluție față de metodele educaționale tradiționale.*

În accepțiunea acestui articol, un soft educațional înseamnă un program care completează profesorul, care poate face ceva ce acesta nu poate: de exemplu, îi arată elevului o imagine sugestivă 3D. Așadar, în cele ce urmează, un soft educațional nu este un fișier pdf, o prezentare de lecție realizată în PowerPoint. un program care face calcule sau care înlocuiește o carte executând o prezentare.

2. Premisele studiului

Înainte de a folosi la clasă astfel de programe, am crezut că utilizarea lor ar putea perturba modul de înțelegere de către elevi a unor concepte matematice. Pentru a ne documenta, am accesat, pe internet, forum-uri legate de acest subiect. Am fost surprinși să constatăm că atitudinea profesorilor, exprimată pe aceste forumuri, este în mod clar una pozitivă. În multe dintre postări, se exprima părerea că, folosind aceasta metodă de predare, se câștigă timp.

Ulterior, am găsit pe site-ul MEC exemple de softuri educaționale ([1]). Soft-uri asemănătoare am găsit și la liceul unde predăm și am profitat de această ocazie pentru a le prezenta elevilor. Rezultatele au fost surprinzătoare: elevii au fost foarte interesați și ne-au cerut adresele de internet de la care pot descărca aceste programe, pentru a le folosi și acasă. Am remarcat însă că elevii își pierd interesul și se pierde timp până când imaginile din soft sunt schimbate.

Ulterior, elevii ne-au adus și alte softuri educaționale. Unii dintre ei au recunoscut că aveau aceste programe de mai mult timp, dar că nu știau să le folosească.

Am constata că unele softuri aveau erori de programare. Această experiență ne-a învățat să avem grijă ce soft-uri recomandăm elevilor noștri și mai ales ce softuri folosim. Ulterior, am identificat softuri mai bine structurate, care conțin, de exemplu: partea de teorie, exemple, teme pentru elevi, teste pentru evaluare.

Există chiar posibilitatea ca profesorul să își creeze singur o structură, adaptată lecției.

Concluzia la care am ajuns noi este că softurile educaționale îl pot ajuta pe profesor în explicarea conceptelor teoretice, dar că în utilizarea lor trebuie păstrată o oarecare măsură. În plus, evaluarea prin intermediul softurilor educaționale ar trebui făcută doar cu scop diagnostic: pentru notarea elevului, ar trebui folosite alte metode de evaluare.

3. Cum folosim la clasă un soft educațional?

Prezentăm în continuare câteva sfaturi utile pentru alegerea și utilizarea unui soft educațional.

Unele dintre softurile utilizate de noi au avut greșeli de conținut. De aceea, este bine ca, înainte de utilizarea unui astfel de soft, să verificați cu atenție conținutul științific. Descărcarea softurilor de pe site-uri oficiale (de exemplu, site-ul MEC), este recomandată. Rețineți că un soft bun este un soft inteligent creat.

Utilizați softuri care explică eficient elemente greu de înțeles din programa școlară.

Folosiți pentru prezentarea softului un video-proiector. După prezentare, puteți lăsa elevii să lucreze individual. Aveți grijă că unii elevi se vor încurca și vor rămâne în urmă, iar alții, din curiozitate, vor fi mult înaintea.

Utilizarea soft-ului se dovedește utilă după ce elevul și-a făcut o impresie și s-a chinuit să înțeleagă conceptul. Dacă folosiți softul pentru introducerea unui concept, riscați ca elevii să nu fie atenți decât la imagine.

Un soft educațional ar trebui folosit atunci când profesorul vrea să apeleze la imaginația elevului (de exemplu în timpul orelor de geometrie) și când este cu adevărat necesar.

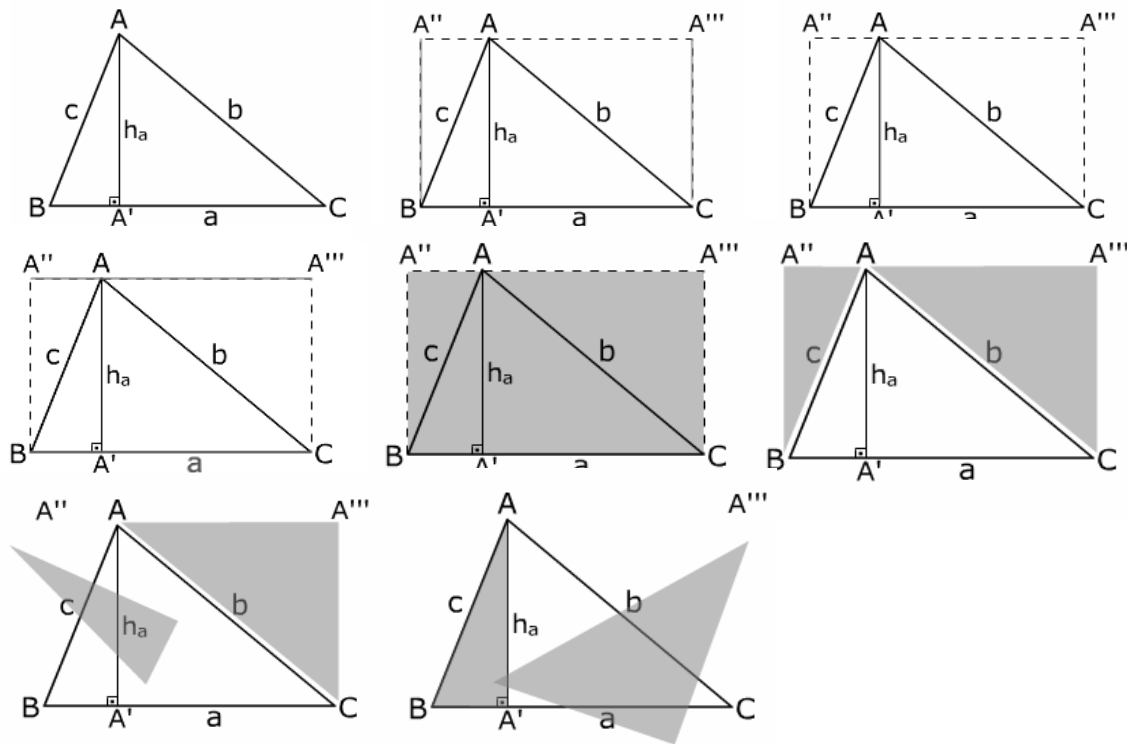
Softurile destinate elevilor de vârstă școlară mică ar trebui să se bazeze pe o poveste sau pe desene. Aveți însă grijă ca elevii să nu cadă în cealaltă extremă, și să considere totul un joc.

4. Exemple

4.1.

Vom prezenta mai jos imagini dintr-un soft educațional, prin care este justificată formula pentru aria triunghiului.

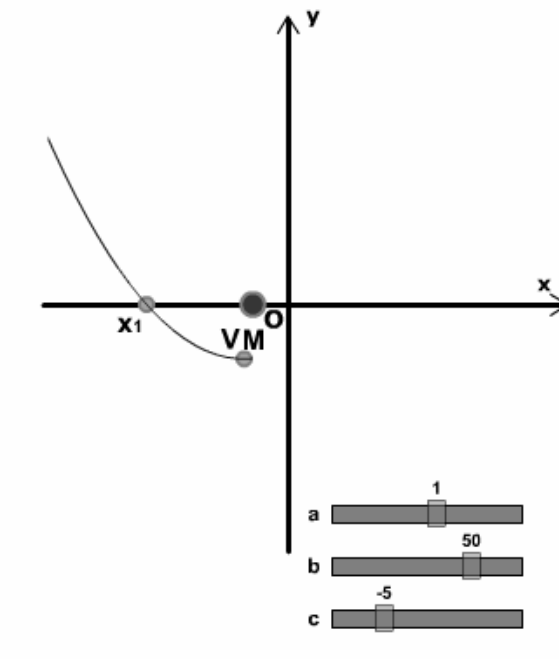
În exemplul prezentat, partea ce ține efectiv de softul educațional este redată în ultimele două imagini. Programul realizează efectiv deplasarea celor două triunghiuri colorate, până se suprapun peste triunghiurile albe. Astfel, imaginea îi rămâne întipărită elevului în minte și, de aceea, congruența celor două perechi de triunghiuri se va părea naturală. Utilizarea acestui soft ar trebui continuată prin demonstrarea tuturor afirmațiilor sugerate prin desen și de identificarea efectivă a formulei de calcul pentru aria unui triunghi.



4.2.

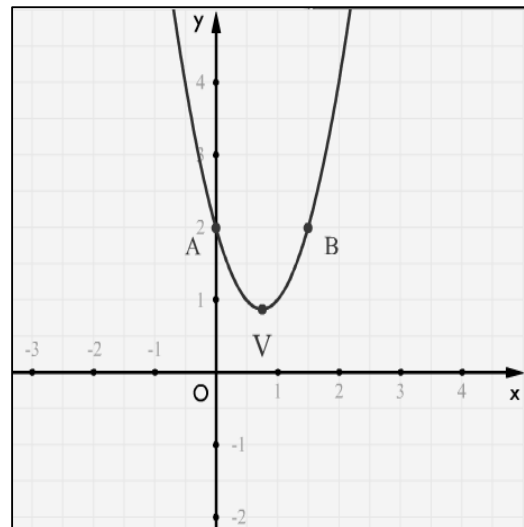
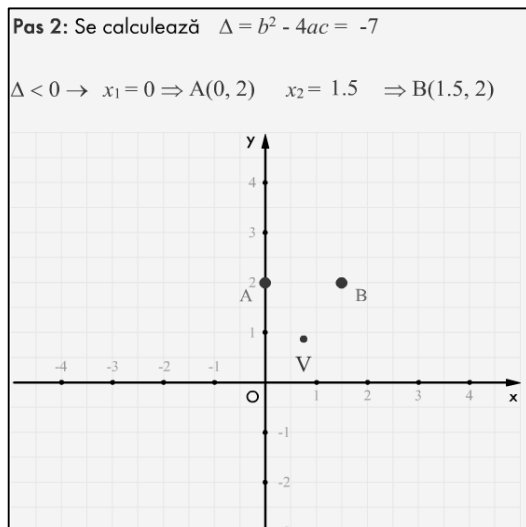
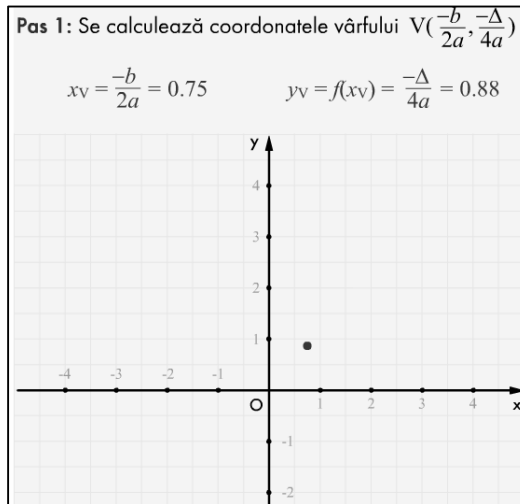
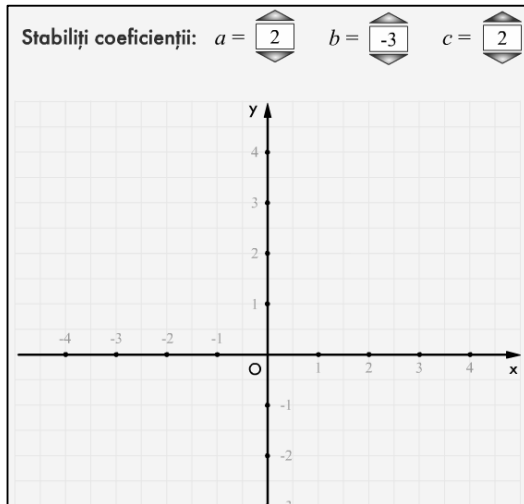
Imaginea de mai jos este preluată dintr-un soft privind funcția de gradul II.

Cele trei segmente colorate oferă posibilitatea selectării valorilor pentru coeficienții funcției. Mișcarea punctului pe axa Ox determină trasarea automată de către program a graficului funcției respective. În acest fel, elevul poate experimenta într-un context dinamic și se poate concentra asupra legăturii între coeficienți și forma graficului.



4.3.

Prezentăm mai jos un alt soft educațional, util în studiul funcției de gradul al II-lea.

**Bibliografie**

- [1] <http://www.siveco.ro/web/content.jsp?page=212&language=1>
- [2] <http://advancedelearning.com/index.php/articles/c321>
- [3] <http://educreativ.ro/produsele-educreativ.htm>
- [4] <http://magazin.intuitext.ro/index.php?disciplina=1&produs=33>

UTILIZAREA CALCULATOARELOR ȘI A RESURSELOR INTERNET ÎN CERCETAREA ȘTIINȚIFICĂ STUDENTEASCĂ

COMPUTER AND INTERNET IN SCIENTIFIC RESEARCH OF STUDENTS

Mihaela A. GHELMEZ, Elena SLAVNICU, Adrian M. DUMITRESCU

Universitatea "Politehnica" București, România

mghelmez@yahoo.com

Abstract. The aim of this paper is to present the use of computers and INTERNET facilities in student's scientific activity. We present some examples of papers, made by professors and students, that was awarded with various prizes.

1. Introducere

Activitatea de cercetare științifică studentească este tradițională în Universitatea "Politehnica" din București. Programul nostru de cercetare se înscrie în contextul reformei din învățământul și cercetarea științifică românească, bazate pe standarde europene, condițiile în care utilizarea calculatorului devine din ce în ce mai răspândită în toate țările lumii și în toate domeniile.

Am ținut seama că în sistemul educational modern, bazat pe standardele internaționale și în legătură cu alte programe de același profil, se urmărește implicarea studenților în activitățile de cercetare, în vederea creării de specialiști cât mai bine pregătiți, capabili să utilizeze tehnologia modernă. De asemenea, se urmărește creșterea nivelului cursurilor și a laboratoarelor didactice și de cercetare, prin activitatea studenților alături de cea a cadrelor didactice, se pune accentul pe studiul individual, facilitat de folosirea programelor de calculator și a informației stocate pe Internet, pe aplicații interdisciplinare.

În decursul acestei activități comune studenți-cadre didactice s-au studiat și aplicat programe utilitare, unele programe speciale și de tip "program flexibil", pentru studierea subiectelor din programele de învățământ de interes. Datele experimentale obținute de către studenți în cadrul unor teme de cercetare propuse de către cadrele didactice îndrumatoare, au fost procesate în colaborare, iar rezultatele au fost prezentate sub formă de proiecte, de lucrări la sesiunile științifice studentești și în cadrul altor manifestări. S-au editat și se urmărește în continuare editarea și multiplicarea unor materiale pentru studenți în domeniul abordat de acest studiu.

În această lucrare vom prezenta activitatea de cercetare a studenților participanți la cursurile de fizică tehnologică și de tehnologii electrofizice.

Până în prezent, a fost publicată o monografie în limba engleză "Biological membrane simple models in physical fields", dedicată unei distinse profesoare, Maria Honciuc, pentru energia pe care a depus-o și rezultatele deosebite obținute de-a lungul timpului în activitatea de cercetare cu studenții. Această lucrare este oferită în fiecare an

pentru cea mai buna prezentare în domeniul de cercetare interdisciplinar al aplicațiilor fizicii în biologie și medicina, ca Premiul Special "Maria Honciuc".

Este în pregătire lucrarea "Aplicațiile calculatoarelor și a resurselor Internet în cercetarea științifică studentescă", în care cele mai bune lucrări, care au primit premii ale UPB, vor fi editate pentru a pune la dispoziția studenților un material care să îi familiarizeze cu cerințele actuale ale cercetării studentești.

Considerăm remarcabilă contribuția de-a lungul timpului a studenților care s-au arătat interesați de aceste cercetări și au participat la măsurători și la elaborarea unor modele teoretice, precum și la elaborarea unor lucrări publicate în reviste de prestigiu sau comunicate la diferite întâlniri de specialitate din țară și din străinătate. Odată cu extinderea utilizării calculatoarelor electronice în învățământ și cercetare, tinerii au contribuit în proporție sporită și cu rezultate foarte bune.

Din acest motiv, în lucrarea de față sunt incluse exemple de lucrări ale studenților.

2. Exemple de contribuții ale studenților

În această perioadă au fost construite unele modele teoretice ale fenomenelor studiate. S-au efectuat simulări pe calculator ale unor fenomene fizice, chimice, și s-au studiat aplicații în biologie și medicină, s-au elaborat metode de lucru și s-au optimizat metode existente. S-au utilizat colaborările existente cu institute din străinătate.

Prezentăm aici un exemplu de studiu al mișcării electronului în atom. Acest subiect apare în cadrul cursului de fizică, dar metoda de studiu aleasă este mai modernă.

2.1. Studiul mișcării electronului în atom

2.1.1 Introducere

Ideea ilustrării mișcării electronului în atom a pornit de la cursul de utilizare a calculatorului, în încercarea de a învăța să folosim Internetul pentru cercetare și documentare. Lucrarea a fost prezentată și răsplătită cu cel mai bun calificativ, fiind apreciată atât de profesori de fizică, cât și de profesori de chimie.

Grație perfecționării cunoștințelor fundamentale din fizică și chimie, "Studiul mișcării electronului în atom" poate fi considerată o lucrare în care se face cunoscută metoda dinamicii neliniare.

2.1.2. Orbitali

Când doi atomi sunt suficienți de apropiați în spațiu, orbitalii lor atomici se întrepătrund, dând naștere unor orbitali moleculari: un orbital de legătură și un orbital de antilegătură. Orbitalii fiind analogi unor unde electronice staționare, întrepătrunderea a doi orbitali corespunde interferenței a două unde electronice. Orice undă electronică (orbital) este descrisă de o funcție de undă ψ .

Pentru unda tridimensională a mișcării unui electron în câmpul unui proton este valabilă ecuația de undă a lui Schrödinger (1926).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V)\psi = 0 \quad (1)$$

h – constanta lui Planck;

m – masa electronului;

E – energia totală;

V – energia potențială;

$E-V$ – energia cinetică;

ψ - funcția de undă a electronului.

Ecuția Schrödinger nu prevede traiectorii precise ale electronilor, ci numai intensitățile maxime și minime ale undei staționare electronice.

Integrarea ecuației de undă și obținerea valorii ψ nu este posibilă decât pentru anumite valori ale energiei totale a sistemului, numite valori proprii determinate de numere n , numere cuantice. Astfel, cuantificarea apare de la sine.

2.1.3. Analiza mișcării electronului în atom prin metode ale dinamicii neliniare oscilatori

Ținând seama că mișcarea anarmonică forțată a electronului este mult mai complexă decât cea obținută în urma aplicării metodelor perturbative, rezultă că polarizația mediului prin care se propagă o undă electromagnetică prezintă aceleași caracteristici și devine posibilă explicarea unor instabilități în sistemele corespunzătoare.

Considerăm instabilitățile în cavitatea optică pasivă în inel, în care se află un mediu optic neliniar de tip Kerr. Acestea se pot explica pe baza fenomenului de interacție a patru unde plane. Sistemul se comportă ca un oscilator parametric; oscilațiile intensității fasciculului de ieșire sunt atribuite fenomenului de bătăi între semnalul injectat în cavitate și câmpurile generate de oscilatorul parametric. Acest model de analiză a dinamicii sistemului permite stabilirea unui mecanism de generare a fotonilor de frecvențe corespunzătoare generării de armonice precum și a subarmonicilor de tip dublare de perioadă.

Oscilatorul Duffing

Conform descrierii clasice a lui Lorentz, la propagarea unei unde electromagnetice prin materie, electronii execută oscilații forțate. În cazul unor câmpuri suficient de slabe, forțele de revenire sunt proporționale cu elongația și în consecință mișcarea, considerată pentru simplitate unidimensională, este descrisă de ecuația:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E(t) \quad (2)$$

τ - constanta de timp a oscilatorului dată de pierderile de energie prin radiație;

ω_0 - frecvența proprie de oscilație;

e – sarcina electrică a electronului;

m – masa electronului;

$E(t)$ – intensitatea câmpului electric al undei electromagnetice.

Considerând o excitație armonică, $E(t) = E_0 \cos \omega t$, (mișcarea electronului este oscilatorie armonică de pulsație ω), mișcarea electronului poate fi considerată ca o mișcare în care forțele de legătură ale electronului în atom sunt descrise prin potențialul parabolic $V(x) = (1/2)m\omega_0^2 x^2$. Această aproximație este însă acceptabilă numai pentru cazul oscilațiilor de mică amplitudine. Altfel, în dezvoltarea în serie Taylor în jurul poziției de echilibru stabil $x=0$, potențialul trebuie completat cu termeni de ordin superior. Vom restrânge analiza la situația:

$$V(x) = (1/2)m\omega_0^2 x^2 + (1/4)m\alpha x^4, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

în care potențialul în care se mișcă electronul este simetric în raport cu originea și conține o singură corecție dată de termenul de gradul patru. Ecuația de mișcare a electronului, considerând potențialul corectat (3), este:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = -\frac{e}{m}E(t), \quad (4)$$

numită ecuația oscilatorului Duffing.

O soluție analitică a acestui oscilator nu poate fi scrisă. Vom investiga acest sistem neliniar folosind metodele dinamicii neliniare.

Metoda dinamicii neliniare

Scriem $E(t) = E_0 \cos \omega t$ și introducem coordonata adimensională $x' = (\sqrt{\alpha}/\omega_0)x$ și variabila timp adimensională $t' = \omega_0 t$. Ecuația oscilatorului Duffing (II.3) devine

$$\ddot{x}' + \frac{1}{\omega_0 \tau} \dot{x}' + x' + x'^3 = -\frac{e}{m} E_0 \frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0^3} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} t'\right). \quad (5)$$

Notând

$$d = \frac{1}{\omega_0 \tau}, \quad a = -\frac{e}{m} E_0 \frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0^3}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0},$$

obținem ecuația oscilatorului Duffing în forma redusă

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = a \cos \Omega t, \quad (6)$$

unde pentru simplitate s-au omis accentele variabilelor coordonată și timp.

În absența perturbației externe, oscilatorul atinge poziția de echilibru $x=0$ după un interval de timp de ordinul $1/d$. În prezența excitației, vom aproxima ecuația de mișcare sub forma unei oscilații de pulsație egală cu cea de excitație și amplitudine lent variabilă în timp (Slowly Varying Amplitude Approximation=SVAA):

$$x(t) = (1/2)[A(t)e^{-i\Omega t} + \text{c.c.}]. \quad (7)$$

Introducem (7) în (6) și rezultă:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(\ddot{A} - 2i\Omega\dot{A} - \Omega^2 A)e^{-i\Omega t} + \text{c.c.}] + d\frac{1}{2}[(\dot{A} - i\Omega A)e^{-i\Omega t} + \text{c.c.}] \\ & + \frac{1}{2}(Ae^{-i\Omega t} + \text{c.c.}) + \left[\frac{1}{2}(Ae^{-i\Omega t} + \text{c.c.})\right]^3 = a\frac{1}{2}(e^{-i\Omega t} + \text{c.c.}). \end{aligned}$$

Conform SVAA, $|\ddot{A}(t)| \ll \Omega^2 |A(t)|$. Folosind în continuare aproximația unei rotitoare (Rotating Wave Approximation=RWA) din Optica cuantică conform căreia numai undele care în planul complex se rotesc în același sens interacționează puternic, avem:

$$(d - 2i\Omega)\dot{A} + (1 - \Omega^2 - id\Omega + \frac{3}{4}|A|^2)A = a. \quad (8)$$

Soluția staționară A_0 a acestei ecuații satisface

$$(1 - \Omega^2 - id\Omega + \frac{3}{4}|A_0|^2)A_0 = a \quad (9)$$

și corespunde unei mișcări armonice de amplitudine A_0 și pulsație Ω .

Dependența amplitudinii de oscilație de frecvența excitației este reprezentată în figura 1 pentru mai multe valori ale amplitudinii excitației cât și ale constantei de relaxare. Se observă că pentru excitații suficient de intense și amortizări suficient de slabe, într-un interval de valori Ω există trei valori posibile ale amplitudinii A_0 a oscilației.

Această dependență a amplitudinii de oscilație este apropiată de frecvența excitației conform aproximațiilor SVAA și RWA.

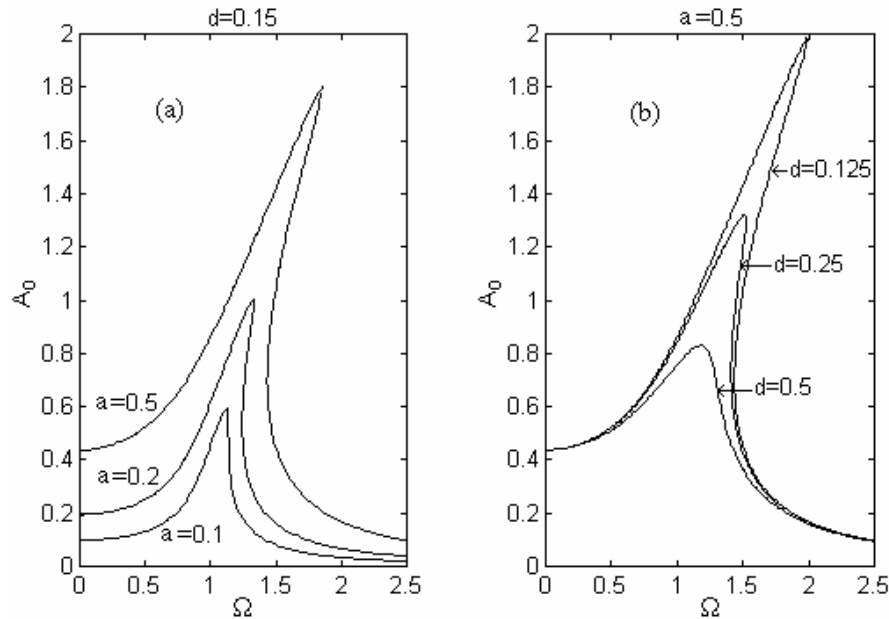


Figura 1. Dependența amplitudinii de oscilație de frecvența excitației conform aproximațiilor SVAA și RWA.

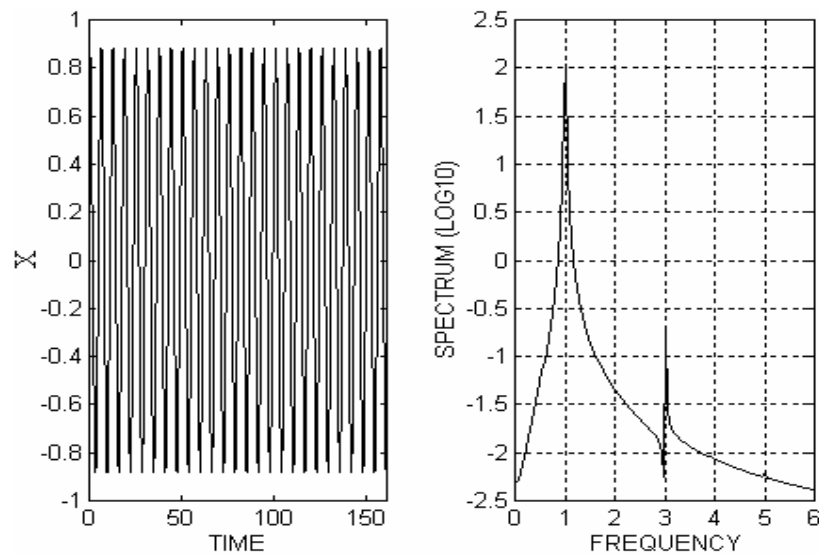


Figura 2. Evoluția temporală a oscilatorului Duffing de parametri $d=0.15$, $a=0.5$, $\Omega=1$ (a) și spectrul de putere corespunzător acestei dinamici (b). Frecvența este exprimată în unități $\Omega/(2\pi)$.

În figura 2 se reprezintă evoluția în timp a oscilatorului obținută prin integrarea numerică a ecuației acestuia, la valori ale parametrilor considerate anterior în figura 1a. Spectrul Fourier arată că pe lângă oscilația de frecvență egală cu cea a excitației, picuri de mărime din ce în ce mai mică sunt prezente pentru frecvențe multipli impari ai frecvenței excitației. Aceste picuri nu sunt în contradicție cu aproximațiile considerate întrucât înălțimile acestora sunt cu câteva ordine de mărime mai mici decât înălțimea fundamentalei.

Analiza comportării oscilatorului Duffing în diferite situații

Oscilatorul Duffing va fi urmărit la amplitudini ale forței de excitație din ce în ce mai mari. După cum se va vedea ulterior, la valori fixate ale parametrilor, mișcarea nu mai poate fi aproximată cu o oscilație, așa că va trebui să folosim în locul curbei de rezonanță un alt tip de reprezentare. Aceasta este diagrama de bifurcație. Considerăm pentru început o valoare relativ mică a amplitudinii forței, și anume $a=2$. Figura 3 arată diagrama de bifurcație a vitezei oscilatorului considerând frecvența excitației ca parametru de control: pentru o valoare Ω este reprezentată viteza la momentele de timp kT , $(k+1)T$, unde k este un întreg suficient de mare astfel încât dinamica asimptotică să fie cea reprezentată ($T=2\pi/\Omega$).

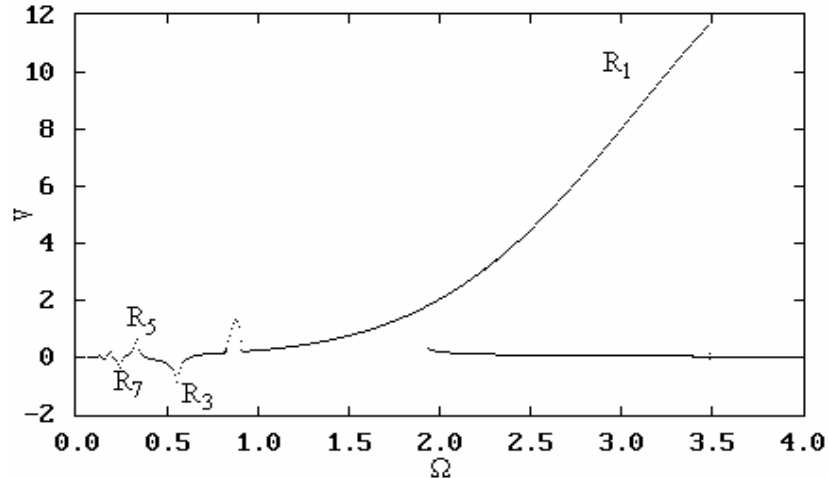


Figura 3. Diagrama de bifurcație a vitezei oscilatorului Duffing considerând frecvența Ω a excitației ca parametru de control. $d=0.15$ și $a=2$.

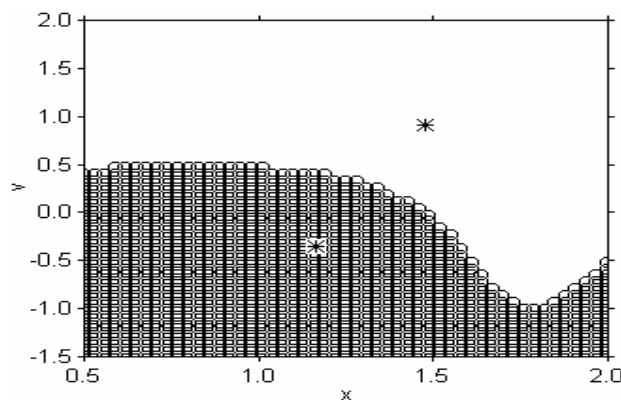


Figura 4. Bazinele de atracție ale celor doi atractori asimetrici care coexistă la valorile $d=0.15$, $a=2$ și $\Omega=0.85$ ale parametrilor oscilatorului. S-a considerat secțiunea Poincaré stroboscopică definită de momentele de timp $t_n = nT$, $n \in \mathbf{N}$. Atractorii au coordonatele $(1.16137, -0.35764)$ și $(1.47788, 0.90315)$. Bazinul de atracție al primului punct este marcat.

În afara rezonanțelor secundare R_3, R_5, \dots , întâlnite anterior, un fenomen suplimentar are loc între rezonanța R_1 și prima rezonanță secundară, R_3 .

Spectrele de putere corespunzătoare arată existența armonicilor pare alături de cele impare. Bazinele de atracție ale celor doi atractori asimetrice au fost determinate și prezentate în figura 4. Distrugerea atractorului simetric și substituirea acestuia cu doi atractori asimetrice constituie prima bifurcație în sistem și este cauzată de simetria sistemului dinamic studiat, după cum se arată în continuare.

Oscilatorul Duffing poate fi scris sub forma unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (x_2, -dx_2 - x_1 - x_1^3 + a \cos \Omega t), \quad (10)$$

în care aplicația \mathbf{F} satisface relația de simetrie

$$\mathbf{F}(-\mathbf{x}, t+T/2) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}, t). \quad (11)$$

2.1.4. Aplicație

Vom arăta că pentru oscilatorul Duffing aplicația Poincaré este exprimabilă ca pătratul unei alte aplicații discrete.

Folosind (11), ecuația sistemului poate fi scrisă sub forma

$$-\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(-\mathbf{x}(t), t + T/2),$$

relație care pentru evoluția între momentele t_1 și t_2 poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{P}_{t_1}^{t_2} = (-I) \circ \mathbf{P}_{t_1+T/2}^{t_2+T/2} \circ (-I),$$

de unde

$$\mathbf{P}_{t_1+T/2}^{t_2+T/2} = (-I) \circ \mathbf{P}_{t_1}^{t_2} \circ (-I).$$

Folosind acest rezultat datorat simetriei sistemului, aplicația Poincaré cu $t_0 = 0$ se exprimă

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0^T = \mathbf{P}_{T/2}^T \circ \mathbf{P}_0^{T/2} = (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2} \circ (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}, \\ \mathbf{P} &= \tilde{\mathbf{P}}^2, \text{ cu } \tilde{\mathbf{P}} = (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Relația (12) arată că pentru studiul bifurcațiilor orbitelor simetrice, aplicația discretă $\tilde{\mathbf{P}}$ trebuie folosită în locul aplicației \mathbf{P} . Punctele fixe ale aplicației Poincaré stroboscopice \mathbf{P} corespund orbitelor T-periodice. Dacă orbita T-periodică este simetrică, atunci

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}(0) = (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{x}(T/2) = \mathbf{x}(0),$$

adică aplicația $\tilde{\mathbf{P}}$ prezintă un punct fix pentru această orbită. Tranziția de la orbita T-periodică simetrică la cea nesimetrică este o bifurcație cu dublarea perioadei pentru aplicația $\tilde{\mathbf{P}}$. Într-adevăr, dacă orbita T-periodică nu este simetrică,

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}(0) = (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{x}(T/2) \neq \mathbf{x}(0),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^2\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0),$$

adică aplicația $\tilde{\mathbf{P}}$ prezintă un ciclu de perioadă 2.

Existența unui spectru de putere format numai din armonicile impare ale frecvenței de excitație este o consecință a proprietății de simetrie a soluției. În cazul orbitelor simetrice coeficienții dezvoltării sunt:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-ik\Omega t) dt = \frac{1}{T} [1 - (-1)^n] \int_0^{T/2} x(t) \exp(-ik\Omega t) dt, \quad k = \text{întreg}.$$

Pentru $k = \text{par}$, rezultă $X_k = 0$.

2.1.5. Concluzii

Electroni din atom tind să se orienteze într-un câmp magnetic exterior, fie în sensul câmpului, fie în sensul opus.

Ecuția Schrödinger nu prevede traiectorii precise ale electronilor, ci numai intensitățile maxime și minime ale undei staționare electronice.

Ecuția oscilatorului Duffing este ecuația de mișcare a electronului, considerând că potențialul în care se mișcă acesta este simetric în raport cu originea și conține o singură corecție dată de termenul de gradul patru.

Dependența amplitudinii de oscilație de frecvența excitației este reprezentată în figura 1 pentru mai multe valori ale amplitudinii excitației cât și ale constantei de relaxare. Se observă că pentru excitații suficient de intense și amortizări suficient de slabe, într-un interval de valori Ω există trei valori posibile ale amplitudinii A_0 a oscilației. Această dependență a amplitudinii de oscilație este apropiată de frecvența excitației conform aproximațiilor SVAA and RWA.

În figura 2 se reprezintă evoluția în timp a oscilatorului obținută prin integrarea numerică a ecuației acestuia, la valori ale parametrilor considerate anterior în figura 1a. Spectrul Fourier arată că pe lângă oscilația de frecvență egală cu cea a excitației, picuri de mărime din ce în ce mai mică sunt prezente pentru frecvențe multipli impari ai frecvenței excitației. Aceste picuri nu sunt în contradicție cu aproximațiile considerate întrucât înălțimile acestora sunt cu câteva ordine de mărime mai mici decât înălțimea fundamentalei.

Oscilatorul Duffing va fi urmărit la amplitudini ale forței de excitație din ce în ce mai mari. Considerăm pentru început o valoare relativ mică a amplitudinii forței, și anume $a=2$. Figura 3 arată diagrama de bifurcație a vitezei oscilatorului considerând frecvența excitației ca parametru de control: pentru o valoare Ω este reprezentată viteza la momentele de timp kT , $(k+1)T$, ..., unde k este un întreg suficient de mare astfel încât dinamica asimptotică sa fie cea reprezentată ($T=2\pi/\Omega$).

În afara rezonanțelor secundare R_3, R_5, \dots , întâlnite anterior, un fenomen suplimentar are loc între rezonanța R_1 și prima rezonanță secundară, R_3 .

Spectrele de putere corespunzătoare arată existența armonicelor pare alături de cele impare. Bazinele de atracție ale celor doi atractori asimetrice au fost determinate și prezentate în figura 4. Distrugerea atractorului simetric și substituirea acestuia cu doi atractori asimetrice constituie prima bifurcație în sistem și este cauzată de simetria sistemului dinamic studiat, după cum se arată în continuare.

$$\mathbf{P}_{t_1+T/2}^{t_2+T/2} = (-I) \circ \mathbf{P}_{t_1}^{t_2} \circ (-I).$$

Folosind acest rezultat datorat simetriei sistemului, aplicația Poincaré cu $t_0 = 0$ se exprimă

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0^T = \mathbf{P}_{T/2}^T \circ \mathbf{P}_0^{T/2} = (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2} \circ (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}, \\ \mathbf{P} &= \tilde{\mathbf{P}}^2, \text{ cu } \tilde{\mathbf{P}} = (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Relația (12) arată că pentru studiul bifurcațiilor orbitelor simetrice, aplicația discretă $\tilde{\mathbf{P}}$ trebuie folosită în locul aplicației \mathbf{P} . Punctele fixe ale aplicației Poincaré stroboscopice \mathbf{P} corespund orbitelor T-periodice. Dacă orbita T-periodică este simetrică, atunci

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}(0) = (-I) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{x}(T/2) = \mathbf{x}(0),$$

adică aplicația $\tilde{\mathbf{P}}$ prezintă un punct fix pentru această orbită. Tranziția de la orbita T-periodică simetrică la cea nesimetrică este o bifurcație cu dublarea perioadei pentru aplicația $\tilde{\mathbf{P}}$. Într-adevăr, dacă orbita T-periodică nu este simetrică,

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}(0) = (-\mathbf{I}) \circ \mathbf{P}_0^{T/2}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{x}(T/2) \neq \mathbf{x}(0),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^2\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0),$$

adică aplicația $\tilde{\mathbf{P}}$ prezintă un ciclu de perioadă 2.

Ecuția oscilatorului Duffing este ecuația de mișcare a electronului, considerând că potențialul în care se mișcă acesta este simetric în raport cu originea și conține o singură corecție dată de termenul de gradul patru.

Existența unui spectru de putere format numai din armonicile impare ale frecvenței de excitație este o consecință a proprietății de simetrie a soluției. În cazul orbitelor simetrice coeficienții dezvoltării sunt:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-ik\Omega t) dt = \frac{1}{T} [1 - (-1)^n] \int_0^{T/2} x(t) \exp(-ik\Omega t) dt, \quad k = \text{întreg}.$$

Pentru $k = \text{par}$, rezultă $X_k = 0$.

3. Considerații finale

În ultimii ani s-a remarcat un interes deosebit în domeniul aplicațiilor laserilor în medicină și biologie, precum și în studiul asistat de calculator al investigațiilor făcute în această arie, și de altfel în toate celelalte. Din acest motiv, studiile noastre, axate pe comportarea neliniară a diferitelor medii materiale, s-au orientat către substanțele cu rol important în materia vie, cum ar fi acizii grași și unele mixturi ale acestora.

Au fost create și studiate modele de laborator și pe calculator ale membranei biologice. În aceste cercetări au fost angrenate cadre didactice, cercetători, dar și studenți. Sunt prezentate rezultatele obținute prin modelarea pe calculator a unor rezultate experimentale privind interacția neliniară a unor fascicule laser cu acizi grași și mixturi de acizi grași sau acizi grași și colesterol sau medicamente uzuale. A fost studiată cu precădere tranziția către faza de cristal lichid, aceasta părând a fi implicată cel mai adesea în procesele care au loc în membrana biologică.

În general, a fost unanim acceptat faptul că, la temperaturi nu prea mari, materia se manifestă sub forma a trei stări de agregare: solidă, lichidă și gazoasă. Aceasta nu este în întregime corect, deoarece anumite substanțe organice nu prezintă o singură tranziție de fază de la solid la lichid și invers, ci o succesiune de tranziții. Aceste tranziții conțin noi faze, ale căror proprietăți mecano-electrice și de simetrie sunt intermediare între cele ale solidului ordonat și lichidul izotrop. Aceste mezofaze sunt cunoscute sub numele de cristale lichide. Cristalele lichide sunt formate din molecule a caror distribuție spațială nu este complet determinată de pozițiile centrilor de masă; pe lângă ordonarea de poziție, un rol important îl are ordonarea de orientare și rotație.

S-au utilizat laserul cu He-Ne, cu sticla dopată cu neodim și, respectiv, laserul cu argon. Au fost studiate modificarea parametrilor fasciculului sau pulsului laser la trecerea prin mediul transparent format de celulele tip sandwich cu acizi grași și mixturi. Calculele și reprezentările grafice s-au făcut pe baza programului TableCurve3D.

S-a constatat că aceste substanțe prezintă efecte neliniare, care pot fi responsabile de transformările din membrană, dar prin intermediul cărora de asemenea s-ar putea acționa, pentru dirijarea acestor modificări.

Remarcăm utilitatea folosirii în studiul nostru a informației oferite de facilitățile Internet (în speță, www), atât pentru accesare, cât și pentru comparare cu alte studii.

Se observă existența unor analogii profunde între comportări ale cristalelor lichide sub influența unor stimuli externi foarte diferiți. Apare astfel posibilitatea unei priviri unitare asupra tranziției de la o textură la alta. Observațiile la scară microscopică, astfel de tranziții au loc datorită acțiunii cooperative a părților sistemului și care, în anumite situații, pot duce la trecerea bruscă a unor praguri.

Prin aceste mecanisme, la nivel macroscopic are loc o structurare moleculară spațio-temporală. Cauzele și controlul unor astfel de tranziții fac obiectul sinergeticii. În acest sens apariția cristalelor lichide din starea de CS și respectiv din LI se poate explica în termeni sinergetici (auto-organizare) de apariția ordinii în ordine (CS-CL) și a ordinii în dezordine (LI-CL).

Fenomenele de memorie specifice unor CL sub acțiunea unor câmpuri electrice externe și respectiv sub acțiunea neutronilor termici pot fi de asemenea reprezentate în dependențe de tipul diagramelor de bifurcație.

Studiile noastre conduc la ipoteza că rezultatele privind sinergetica CL pot fi extinse la caracterizarea structurilor vii (membrane, țesuturi etc.) În acest context se poate spune că însuși scheletul principal al membranei biologice format dintr-un bistrat lipidic în care se prind proteinele, glucidele etc. (conform modelului elaborat de Singer și Nicholson) este rezultatul unui fenomen de autoorganizare a moleculelor de acizi grași.

Toate studiile efectuate de grupul nostru de cercetare conduc la ipoteza conform căreia sistemul de acizi grași componenți ai membranelor biologice și în general moleculele organice cu un lanț carbonic lung se comportă în interacții cu diverși stimuli externi (câmp termic, câmp electric, câmp electromagnetic etc.) ca sisteme sinergetice, fiind capabile de auto-organizare. Modelele teoretice elaborate de noi conduc către aceeași ipoteză majoră.

Aceste studii sunt importante atât din punct de vedere teoretic cât și prin aplicațiile practice derivate din înțelegerea unora dintre mecanismele fiziologice și patologice caracteristice materiei vii.

Împreună cu studenții, s-au elaborat lucrări care au fost susținute la conferințe, congrese de specialitate sau trimise spre publicare, s-au colectat date pentru elaborarea unor lucrări de licență sau necesare obținerii unor brevete de invenție. Rezultatele obținute se vor constitui într-o bază de date care să poată fi folosită în programele cursurilor pentru studenți.

Lucrăm pentru punerea la punct a unui proiect în vederea dotării unui laborator pentru studenți și doctoranzi, de învățare, investigare și simulare pe calculator.

Studenții au avut acces la toate laboratoarele didactice ale U.P.B., echipate cu toate instalațiile necesare efectuării unor lucrări de calitate și în condițiile cerute de normele de protecția muncii. Laboratorul BN-108/109 de Electronică și Electronică cuantică, laboratorul de cercetare BN-144 în domeniul fotonicii și laboratorul BN-011 dedicat studiilor materiei condensate conțin dotări speciale cu laseri He – Ne, YAG:Nd glass, "noble gases lasers", "solid-state lasers", aparate de măsură ale parametrilor fasciculului: powermetre, fotomultiplicatoare, interferometre, dispozitive de stabilizare, instalații de vid înalt, modulatori și dispozitive cu fibre optice, dispozitive de observație și măsurare a texturilor de cristal lichid etc., la laboratoarele U.M.F. etc.

Bibliografie

- [1] M.Dumitru, *Computer Aided Physics for Chemical Engineering Students*, Proc. of CALISCE'98, The 4th Intl. Conf. on Computer Aided learning and Instruction in Science and Engineering, June 15-17, 1998, Gothenburg, Sweden, Ed. C. Alvegard, ISBN-91-7197-683-3, pp.80-88
- [2] M.Dumitru, V.Ninulescu, P.E.Sterian, M.Piscureanu, *Computer Aided Instruction in Laser Dynamics*, Invited Paper at CCP'98 Conference on Computational Physics, Granada, Spain, Sept.2-5, 1998
- [3] <http://www.aip.org/cip/lrs.htm>
- [4] <http://library.advanced.org/10429/text/eleconfig/electron.htm>
- [5] <http://unitbv.ro/tech/it-fiz-r.htm>
- [6] <http://hyperion.advanced.org/16468/advnc-al.htm>

INEGALITATEA LUI HARDY – LITTLEWOOD – POLYA ȘI APLICAȚII

HARDY-LITTLEWOOD- POLYA INEQUALITY AND APPLICATIONS

Marcela V. Mihai

Prof. drd. gr.I , Grupul Școlar Industrial "Gheorghe Asachi"
București

Convexitatea este o noțiune simplă și naturală care poate fi găsită încă din vremea lui Arhimede în legătură cu faimoasele lui estimări ale numărului π (utilizând poligoanele înscrise și circumscrise unui cerc). De fapt, utilizăm convexitatea tot timpul și în multe moduri. Cel mai prozaic exemplu este poziția noastră verticală, care ne arată că proiecția centrului nostru de greutate se află în interiorul anvelopei convexe a picioarelor noastre. De asemenea convexitatea are un mare impact în viața noastră de fiecare zi prin numeroasele aplicații în industrie, business, medicină și artă. Unul, dar nu primul, dintre matematicienii care s-au ocupat de studiul convexității a fost J.L.W.V. Jensen. Printre alții s-au numărat și Ch. Hermit, O. Holder și Stolz. De-a lungul secolului al XX-lea a avut loc o activitate intensă cu rezultate remarcabile din acest punct de vedere, cu aplicații în analiza funcțională, analiza conveză, optimizarea nonliniară. Un rol de largă popularizare a teoriei funcțiilor convexe a avut-o cartea scrisă de G.H.Hardy, J.E.Littlewood și G.Polya. Punctul modern de vedere asupra funcțiilor convexe evidențiază o frumoasă și elegantă legătură între analiza matematică și geometrie. Un astfel de punct de vedere este ilustrat și în lucrarea de față.

1. Funcții convexe

În acest studiu vom considera că I este un interval real nedegenerat.

Definiția 1.1. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește convexă dacă

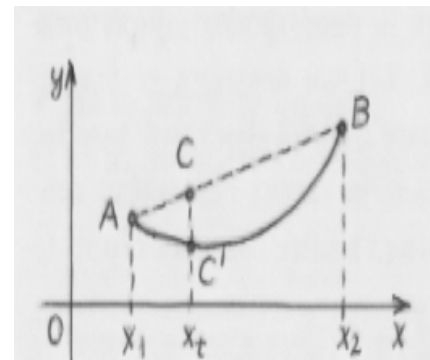
$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), (\forall) x, y \in I, (\forall) \lambda \in [0, 1].$$

Funcția f se numește concavă dacă

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), (\forall) x, y \in I, (\forall) \lambda \in [0, 1].$$

Strict convexitatea și strict concavitata sunt realizate de inegalitățile stricte corespunzătoare. Din punct de vedere geometric spunem că o funcție este convexă pe I dacă segmentul determinat de orice două puncte ale graficului se află deasupra acestuia, adică dacă graficul arată ca în figura alăturată. Dacă în fiecare punct graficul admite o tangentă unică, atunci funcția este convexă dacă tangenta se află sub grafic.

O condiție necesară și suficientă de convexitate (concavitata) în cazul funcțiilor de două ori derivabile pe I este dată de:



Teorema 1.2. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a, b]$. Dacă $f''(x) > 0$, $(\forall) x \in [a, b]$, atunci funcția este convexă pe $[a, b]$; dacă $f''(x) < 0$, $(\forall) x \in [a, b]$, atunci funcția este concavă pe $[a, b]$.

Demonstrație (v. de exemplu, [3]). Fie $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Pentru orice punct $x \in (x_1, x_2)$ se aplică teorema lui Lagrange pe intervalele $[x_1, x]$, $[x, x_2]$ și deci există $c_1 \in (x_1, x)$, $c_2 \in (x, x_2)$ astfel încât

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

Cum $c_1 < c_2$ rezultă $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ (din enunț, derivata a doua este pozitivă deci prima derivată este funcție crescătoare) adică

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Din $x \in (x_1, x_2)$, arbitrar, aceasta este echivalentă cu scrierea

$$x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, \quad (\forall) \lambda \in (0, 1).$$

Înlocuind pe x în inegalitatea de mai sus rezultă

$$f(x) \leq (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

ceea ce arată că funcția f este convexă pe $[a, b]$. Analog se demonstrează și concavitatea.

În cele mai multe cazuri însă funcțiile nu sunt derivabile pe I și deci studiul convexității se bazează pe alte noțiuni teoretice.

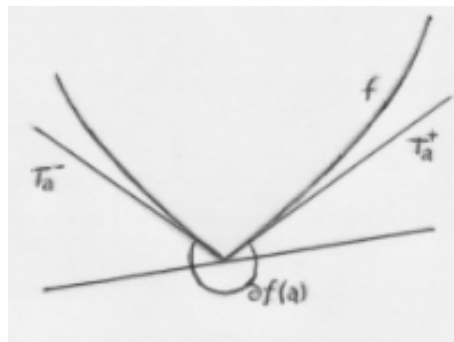
2. Subdiferențiala

În cazul funcțiilor convexe nenetede lipsa liniilor tangente poate fi suplinită de un suport de linii (vezi figura alăturată).

Definiția 2.1. Fiind dată funcția $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ spunem că f admite linii suport în $x \in I$ dacă $(\exists) \lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$f(y) \geq f(x) + \lambda (y - x), \quad (\forall) y \in I.$$

Numim mulțimea $\partial f(x)$ a tuturor numerelor reale λ , subdiferențiala lui f în x .



Geometric, subdiferențiala ne dă pantele liniilor suport ale graficului lui f . Subdiferențiala este întotdeauna o mulțime convexă, posibil vidă. Funcțiile convexe au o proprietate remarcabilă: $\partial f(x) \neq \emptyset$ în toate punctele interioare domeniilor de definiție. Oricum, în cazul lor, subdiferențiala poate fi vidă în punctele de capete [1].

Exemplul 2.2. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Funcția nu este derivabilă în 1 și în -1. De aceea, $\partial f(1)$ și $\partial f(-1)$ sunt mulțimi vide. Putem gândi că $\partial f(x)$ este valoarea în x a funcției ∂f , al cărei domeniu de definiție este format din toate punctele lui I unde f are linii suport.

Lema 2.3. Fie f o funcție convexă pe un interval I . Atunci $\partial f(x) \neq \emptyset$ în toate punctele interioare ale lui I . Mai mult, orice funcție $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(x) \in \partial f(x)$, unde $x \in \text{int } I$, verifică dubla inegalitate: $f'_-(x) \leq \varphi(x) \leq f'_+(x)$, și astfel este crescătoare pe $\text{int } I$. Concluzia de mai sus include și capetele intervalului I , demonstrând că f este derivabilă acolo. Ca o consecință, diferențiabilitatea unei funcții convexe f într-un punct înseamnă că f admite linii suport unice în acel punct.

Demonstrație (v. de exemplu [1]). Mai întâi vom arăta că $f'_+(a) \in \partial f(a)$, $(\forall) a \in \text{int } I$ (și de asemenea, în cel mai stâng punct al lui I , că f este diferențiabilă). De fapt, dacă $x \in I$, $x \geq a$, rezultă că $\frac{f((1-t)a+tx) - f(a)}{t} \leq f(x) - f(a)$, $(\forall) t \in (0, 1]$, ceea ce dă

$$f(x) \geq f(a) + f'_+(a)(x - a).$$

Dacă $x \leq a$, atunci similar obținem $f(x) \geq f(a) + f'_-(a)(x - a)$. Analog, putem argumenta că $f'_-(a) \in \partial f(a)$, $(\forall) a \in \text{int } I$ (și de asemenea, în cel mai drept punct al lui I , că f este diferențiabilă). Deci φ este o funcție crescătoare pe $\text{int } I$.

Fiecare funcție convexă continuă este anvelopa superioară a liniilor ei suport. Mai precis, are loc:

Teorema 2.4. Fie $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție convexă continuă și $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție astfel încât $\varphi(x) \in \partial f(x)$. Atunci $f(z) = \sup \{f(x) + (z - x)\varphi(x) \mid x \in \text{int } I\}$, $(\forall) z \in I$.

Demonstrație. Cazul punctelor interioare este clar. Dacă z este un capăt al lui I , să spunem cel stâng, atunci avem: $f(z + t) - f(z) \leq t\varphi(z + t) \leq f(z + 2t) - f(z + t)$, pentru $t > 0$ suficient de mic, deci $\lim_{t \rightarrow 0^+} t\varphi(z + t) = 0$.

Fie dat $\varepsilon > 0$, $(\exists) \delta > 0$ astfel încât $|f(x) - f(x + t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $|t\varphi(x + t)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$0 < t < \delta$; atunci

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} &< f(x + t) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ -\frac{\varepsilon}{2} &< -t\varphi(x + t) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \varepsilon &< f(x + t) - t\varphi(x + t) - f(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

Deci $f(x + t) - t\varphi(x + t) < f(x) + \varepsilon$, pentru $0 < t < \delta$. Obținem:

$$f(z) = \sup \{f(x) + (z - x)\varphi(x) \mid x \in \text{int } I\}.$$

Următorul rezultat arată că numai funcțiile convexe satisfac condiția $\partial f(x) \neq \emptyset$ în toate punctele interioare ale lui I . [1]

Teorema 2.5. Fie $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție astfel încât $\partial f(x) \neq \emptyset$, $(\forall) x \in \text{int } I$. Atunci f este convexă.

Demonstrație. Fie u și $v \in I$, $u \neq v$ și fie $t \in (0, 1)$. Atunci $(1-t)u + tv \in \text{int } I$, așa că pentru $(\forall) \lambda \in \partial f((1-t)u + tv)$ avem

$$\begin{aligned} f(u) &\geq f((1-t)u + tv) + t(u-v)\lambda \cdot (1-t) \\ f(v) &\geq f((1-t)u + tv) - (1-t)(u-v)\lambda \cdot t \end{aligned}$$

deci

$$(1-t)f(u) \geq (1-t)f((1-t)u + tv) + t(1-t)(u-v)\lambda$$

$$t f(v) \geq t f((1-t)u + tv) - t(1-t)(u-v)\lambda$$

$$(1-t)f(u) + t f(v) \geq [(1-t) + t] f((1-t)u + tv) \Rightarrow$$

Deducem că $(1-t)f(u) + t f(v) \geq f((1-t)u + tv)$, adică f este convăxă.

Vom ilustra importanta subdiferențialei probând două rezultate clasice.

Teorema 2.6. (Inegalitatea Hardy-Littlewood-Polya, v. [1]) Să presupunem că $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție convăxă și să considerăm două familii x_1, x_2, \dots, x_n și $y_1, y_2, \dots, y_n \in I$ astfel încât $\sum_{k=1}^m x_k \leq \sum_{k=1}^m y_k$, pentru $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k$. Dacă $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, atunci $\sum_{k=1}^n f(x_k) \leq \sum_{k=1}^n f(y_k)$, în timp ce dacă $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ are loc inegalitatea în sens invers.

Demonstratie. Ne vom concentra aici asupra primei inegalități (privitoare la familiile descrescătoare), care va fi demonstrată prin inducție matematică. A doua concluzie urmează din prima înlocuind pe f cu $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow \mathbf{R}$, unde $\tilde{I} = \{-x | x \in I\}$ și $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $x \in \tilde{I}$.

Cazul $n=1$ este evident. Presupunând că inegalitatea este adevărată pentru $n-1$ vom demonstra această inegalitate pentru n : din ipoteza teoremei avem $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\min_k y_k, \max_k y_k]$, deci $\min_k y_k \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \max_k y_k \Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n \in \text{int } I$

Din Lema 2.3. obținem:

$$(\exists) \varphi_1 \text{ int } I \rightarrow \mathbf{R} \text{ crescătoare astfel încât } \varphi(x) = \partial f(x), (\forall) x \in \text{int } I.$$

Aplicând teorema 2.4. și formula de sumare a lui Abel obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(y_k) - \sum_{k=1}^n f(x_k) &\geq \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)(y_k - x_k) = \varphi(x_1)(y_1 - x_1) + \\ &\sum_{m=2}^n \varphi(x_m) [\sum_{k=1}^m (y_k - x_k) - \sum_{k=1}^{m-1} (y_k - x_k)] = \varphi(x_m) \sum_{k=1}^m (y_k - x_k) \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} [(\varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1})) \sum_{k=1}^m (y_k - x_k)] = \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} [(\varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1})) \sum_{k=1}^m (y_k - x_k)] \text{ și demonstrația este completă.} \end{aligned}$$

Remarca 2.7. Inegalitatea lui Hardy – Littlewood – Polya implică multe alte inegalități cu funcții convexe, de exemplu inegalitatea lui Popoviciu.

Fără a pierde din generalitate, putem considera ordinea $x \geq y \geq z$. Atunci $\frac{x+y}{2} \geq \frac{y+z}{2} \geq \frac{x+z}{2}$ și $x \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z$. Dacă $x \geq \frac{x+y+z}{3} \geq y \geq z$ atunci inegalitatea lui Popoviciu se obține din teorema 2.5 aplicată familiilor $x_1 = x, x_2 = x_3 = x_4 = \frac{x+y+z}{3}, x_5 = y, x_6 = z, y_1 = y_2 = \frac{x+y}{2}, y_3 = y_4 = \frac{y+z}{2}, y_5 = y_6 = \frac{x+z}{2}$, în timp ce în cazul $x \geq y \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z$ avem familiile: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = x_4 = x_5 = \frac{x+y+z}{3}, x_6 = z, y_1 = y_2 = \frac{x+y}{2}, y_3 = y_4 = \frac{x+z}{2}, y_5 = y_6 = \frac{y+z}{2}$.

A doua aplicație conduce la generalizarea clasică a inegalității lui Jensen care repartizează liniar (nu necesar convăx) combinațiile.

Teorema 2.8. (Jensen – Steffensen, [1]) Fie $x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \in [a, b]$ și fie $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbf{R}$ astfel încât sumele parțiale $S_k = \sum_{i=1}^k p_i$ verifică relațiile:

$$0 \leq S_k \leq S_n \text{ și } S_n > 0.$$

Atunci fiecare funcție convexă $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ verifică inegalitatea

$$f\left(\frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \leq \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n p_k f(x_k).$$

Demonstratie. Fie $\bar{x} = \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) / S_n$ și fie $S_k = S_n - S_{k-1} = \sum_{i=k}^n p_i$.

$S_n(x_1 - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n p_i(x_1 - x_i) = \sum_{j=2}^n (x_{j-1} - x_j) S_j \geq 0$ și $S_n(\bar{x} - x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i(x_i - x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (x_j - x_{j+1}) S_j \geq 0$ ceea ce arată că $x_n \leq \bar{x} \leq x_1$. Acum putem să ne restricționăm la cazul în care f este continuă și punctele $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b) \xrightarrow{\text{lema 2.2}} (\exists) \varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $\varphi(x) \in \partial f(x), (\forall) x \in I$ și $f(z) - f(y) \geq \varphi(c)(z - y)$ dacă $z \geq y \geq c$ și $f(z) - f(y) \leq \varphi(c)(z - y)$, dacă $c \geq z \geq y$.

Alegând de asemenea un index m astfel încât $\bar{x} \in [x_{m+1}, x_m]$, obținem:

$$\begin{aligned} \partial f\left(\frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n p_k x_k\right) - \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) &\leq \sum_{i=1}^{m-1} [\varphi(\bar{x})(x_i - x_{i+1}) - f(x_i) + f(x_{i+1})] \frac{p_i}{S_n} + \\ &+ [\varphi(\bar{x})(x_m - \bar{x}) - f(x_m) + f(\bar{x})] \frac{p_m}{S_n} + [f(\bar{x}) - f(x_{m+1}) - \varphi(\bar{x})(\bar{x} - x_{m+1})] \frac{p_{m+1}}{S_n} + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{n-1} [f(x_i) - f(x_{i+1}) - \varphi(\bar{x})(x_i - x_{i+1})] \frac{p_{i+1}}{S_n}, \end{aligned}$$

care este o sumă de numere nenegative.

Teorema care urmează se referă la funcții convexe, liniare pe porțiuni. Despre o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ spunem că este liniară pe porțiuni dacă există o diviziune $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ astfel încât $f|_{[x_k, x_{k+1}]}$ este o funcție afină, $(\forall) [x_k, x_{k+1}]$.

Teorema 2.9. (T. Popoviciu) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție convexă liniară pe porțiuni. Atunci f este de forma

$$f(x) = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^{n-1} c_k |x - x_k|,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, iar $c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \geq 0$ sunt coeficienți convenabil aleși.

Demonstrație. Fie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ astfel încât $f|_{[x_k, x_{k+1}]}$ să fie funcție afină. Dacă $\alpha x + \beta$ este o funcție afină a cărei restricție la $[x_0, x_1]$ coincide cu $f|_{[x_0, x_1]}$, atunci va fi suport liniar pentru funcția f și $f - (\alpha x + \beta)$ va fi o funcție convexă crescătoare dispărută pe $[x_0, x_1]$. Reflectând un moment, arătăm existența constantei $c_1 \geq 0$ astfel încât $f(x) - (\alpha x + \beta) = c_1(x - x_1)^+$ pe $[x_1, x_2]$. Repetând argumentul ajungem la reprezentarea $f(x) = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^{m-1} c_k(x - x_k)^+$, cu $c_k \geq 0$. Demonstrația se termină înlocuind funcția parte pozitivă prin funcția valoare absolută. Aceasta este posibil datorită formulei $y^+ = (|y| + y)/2$. Să presupunem că

dorim să verificăm valabilitatea formei discrete a inegalității lui Jensen pentru toate funcțiile convexe continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. În timp ce fiecare astfel de funcție poate fi aproximată uniform prin funcții convexe liniare pe porțiuni putem să ne restricționăm la acest caz particular de clase de funcții. Dacă inegalitatea lui Jensen poate fi aplicată pentru două funcții f_1 și f_2 , atunci poate fi aplicată pentru orice combinație $c_1 f_1 + c_2 f_2$ cu coeficienți pozitivi. În acord cu teorema 2.7. aceasta arată că demonstrația inegalității

lui Jensen (în clase de funcții convexe continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$) se reduce la verificarea pentru funcții afine și translații $x \rightarrow |x - y|$, unde ambele cazuri sunt imediate. În aceeași manieră (dar folosind reprezentarea $f(x) - (ax + \beta) = c_1(x - x_1)^2$) putem verifica inegalitatea lui Hardy-Littlewood-Polya. Inegalitatea lui Popoviciu provine din teorema 2.7. Pentru ea, cazul funcției valoare absolută se reduce la inegalitatea lui Hlawka $|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|$, $(\forall) x, y, z \in \mathbf{R}$. (v. [1])

O aplicație interesantă pentru clasa a XI-a este următoarea:

Problema 2.10. ([1]). Fie P, A și P', A' perimetrul, respectiv aria a două poligoane convexe P și Q , inscriptibile în același cerc al cărui centru se află în interiorul fiecăruia. Dacă cea mai mare latură a lui Q este mai mică sau egală cu cea mai mică latură a lui P , atunci $P' \geq P$ și $A' \geq A$. Obținem egalitatea atunci când P și Q sunt congruente și regulate.

Rezolvare. Fie n numărul de laturi ale celor două poligoane și fie x_1, x_2, \dots, x_n unghiurile la centru formate în poligonul Q în ordine descrescătoare, respectiv y_1, y_2, \dots, y_n unghiurile la centru formate în poligonul P în ordine crescătoare. Atunci $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ și $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. Deoarece cel mai mare unghi se opune laturii celei mai lungi, respectiv cel mai mic unghi se opune laturii celei mai mici, obținem

$$x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, \dots, \sum_{k=1}^m x_k \leq \sum_{k=1}^m y_k,$$

pentru $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ și $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k = 2\pi$. Fie $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2R \sin \frac{x}{2}$.

Atunci $f'(x) = R \cos \frac{x}{2}$, $f''(x) = -\frac{R}{2} \sin \frac{x}{2}$. Cum

$$\sin \frac{x}{2} \geq 0, (\forall) x \in [0, 2\pi],$$

avem $f''(x) < 0$, deci f este concavă. Din teorema 2.6. deducem

$$\sum_{k=1}^m f(x_k) \geq \sum_{k=1}^m f(y_k),$$

adică $P' \geq P$ (pentru că $f(x)$ reprezintă lungimea laturii poligonului, corespunzătoare unghiului la centru x – teorema cosinusului). Fie $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{R^2 \sin x}{2}$ (aria triunghiului cu unghiul la centru x). Cum $g''(x) = -\frac{R^2 \sin x}{2} < 0$, obținem că g este concavă și aplicând din nou teorema 2.6., avem că $\sum_{k=1}^m g(x_k) \geq \sum_{k=1}^m g(y_k)$. În concluzie, $A' \geq A$.

Bibliografie

- [1] Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson, *Convex functions and their applications. A contemporary approach*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2005
- [2] *** *Mică Enciclopedie Matematică*, după lucrarea în limba germană - Kleine Enzyklopadie Der Mathematik, 1971, cu completările din limba engleză Mathematics at a Glance, 1975
- [3] Ion Colojoară, *Lecții de Analiză Matematică*, Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1979
- [4] Carol Neuman, Edmond Nicolau, Anghel Schor, *Teoria sumară a dezvoltării Științei*, Editura Politică, București, 1983.

CLASIC ȘI MODERN ÎN CONSTRUCȚIA POLIGOANELOR STELATE

CLASSIC AND MODERN IN THE CONSTRUCTION OF STELLATED POLYGONS

Ramona BĂLAN

Colegiul Tehnic "C. Brâncuși", Oradea
ramona_balan2006@yahoo.com

Abstract. Older and recent views in the construction of stellated polygons are presented. Also, we present some new formulae.

Din punct de vedere geometric, construcția unui poligon regulat înseamnă împărțirea cercului, cu rigla și compasul, în părți egale. Dacă împărțim un cerc în n părți egale, putem uni punctele de diviziune din p în p , $p < n/2$, obținând astfel :

- un poligon regulat convex cu n/d laturi, dacă p și n nu sunt prime între ele, unde d este divizorul comun al numerelor n și p , sau

- un **poligon regulat stelat** cu n laturi, dacă p și n sunt numere prime între ele.

Același poligon regulat stelat se va construi și în cazul în care vom uni punctele de diviziune din $n-p$ în $n-p$.

Noțiunile de centru, apotemă, rază și unghi la centru definite pentru poligonul regulat convex sunt valabile și pentru poligoanele stelate.

Poligonul regulat stelat cu n vârfuri unite din p în p va avea unghiul de la vârf egal cu $\alpha_s = p \frac{2\pi}{n}$. Pentru diverse valori ale lui n există mai multe poligoane regulate stelate în

funcție de numărul numerelor $p < n/2$ prime cu n .

Latura poligonului regulat este dată de formula

$$(1) \quad l_n = 2R \sin \alpha$$

unde α este unghiul la centru al poligonului. Latura poligonului este construibilă dacă ecuația care are drept soluție relația (1) este de gradul al doilea sau reductibilă la gradul al doilea. Așadar nu putem construi latura unui poligon regulat de un număr dat de laturi decât în anumite cazuri. Construcția unor poligoane este exemplificată în continuare:

1. Octogonul regulat stelat

Pentru a obține cele opt puncte de diviziune ale cercului este suficient să construim două diametre perpendiculare care vor împărți cercul în patru părți egale, care la rândul lor vor fi împărțite în câte două părți egale. Unind aceste puncte din trei în trei se construiește octogonul regulat stelat – *fig.1*.

Elementele octogonului regulat stelat:

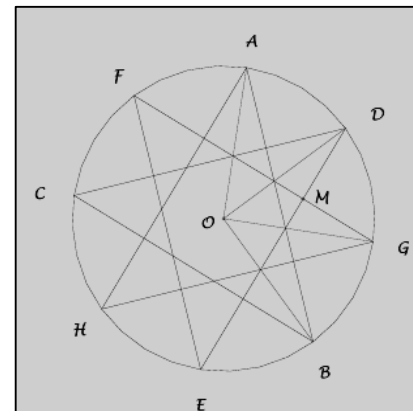


Fig. 1. Octogonul regulat stelat

$$\alpha_{8s} = 3 \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

$$l_{8s} = 2R \sin \frac{3\pi}{8} = 2R \cos \frac{\pi}{8} = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Apotema octogonului regulat stelat:

$$a_{8s} = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2} = \frac{R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Calculul perimetrului și al ariei octogonului regulat stelat:

$$P_s = 8 \cdot l_{8s} = 8R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$A_{8s} = A - 8A_{\Delta MDG}$$

$$m(\angle DMG) = 90^\circ = m(\angle FME)$$

$$\Delta FME \sim \Delta GMD \Leftrightarrow \frac{FM}{MG} = \frac{FE}{GD} \Leftrightarrow \frac{l_{8s} - MG}{MG} = \frac{l_{8s}}{l_8} \Leftrightarrow MG = \frac{l_{8s} \cdot l_8}{l_{8s} + l_8} \Leftrightarrow MG = \frac{R}{2} \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$A_{\Delta MDG} = \frac{MG^2}{2} = \frac{R^2}{2} (2 - \sqrt{2}) \Rightarrow A_{8s} = 2R^2 \sqrt{2} - 2R^2 (2 - \sqrt{2}) = 4R^2 (\sqrt{2} - 1)$$

Împărțind din nou diviziunile cercului în alte două părți egale se vor obține 16 puncte de diviziune care unite din 3 în 3, din 5 în 5 sau din 7 în 7 determină trei poligoane regulate stelate cu 16 laturi – fig 2 a, b, c.

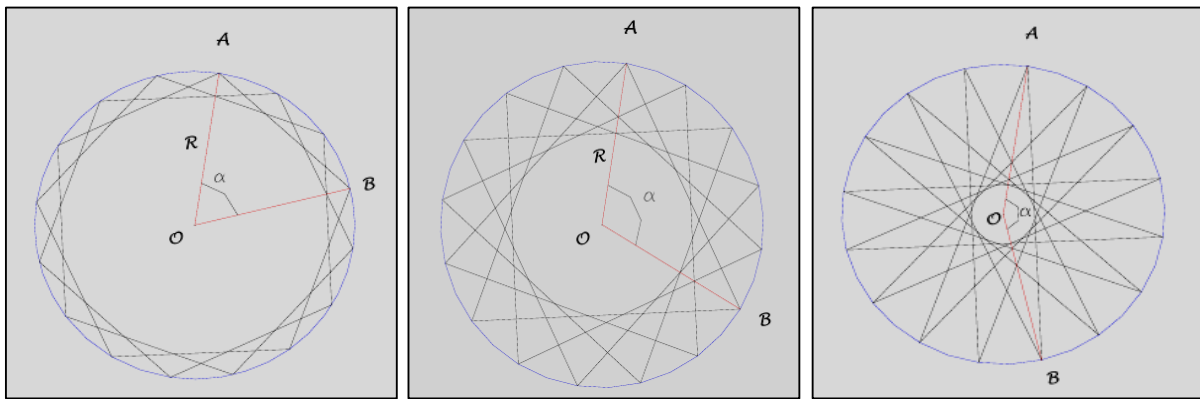


Fig.2 a), b), c). Poligoane regulate stelate cu 16 laturi.

2. Dodecagonul regulat stelat

Împărțind cercul cu ajutorul razei se obțin punctele de diviziune ale hexagonului regulat. Acesta nu poate fi stelat. Împărțind din nou în câte două părți egale diviziunile hexagonului, se vor crea cele 12 vârfuri ale dodecagonului regulat.

Unind diviziunile dodecagonului regulat din 5 în 5 obținem dodecagonul regulat stelat. – fig.3.

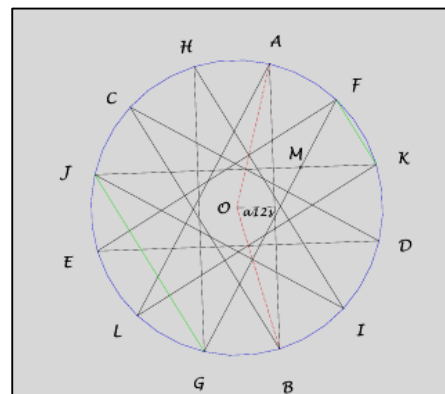


Fig.3. Dodecagonul regulat stelat

Calculul elementelor dodecagonului regulat stelat:

$$\alpha_{12s} = 5 \frac{360^\circ}{12} = \frac{5\pi}{6}$$

$$l_{12s} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = R\sqrt{2+\sqrt{3}} = 2 \cdot a_{12}$$

Calculul apotemei: $a_{12s} = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2} = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{l_{12}}{2}$

Calculul perimetrului și al ariei:

$$P_s = 12l_{12s} = 12R\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$A_s = A - 12 \cdot A_{\Delta FMK}$$

$$m(\angle FMK) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Delta FMK \text{ echilat.} \Rightarrow FM = l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow A_{\Delta FMK} = \frac{R^2}{4}(2\sqrt{3}-3)$$

$$\text{Deci } A_2 = 3R^2 - 3R^2(2\sqrt{3}-3) = 6R^2(2-\sqrt{3})$$

Prin împărțirea în două părți egale a arcelor de cerc determinate de construcția dodecagonului obținem punctele de diviziune pentru construcția poligonului regulat cu 24 de laturi. Trei dintre acestea sunt stelate: $p=5$, $p=7$ – fig.4, $p=11$ – fig.5

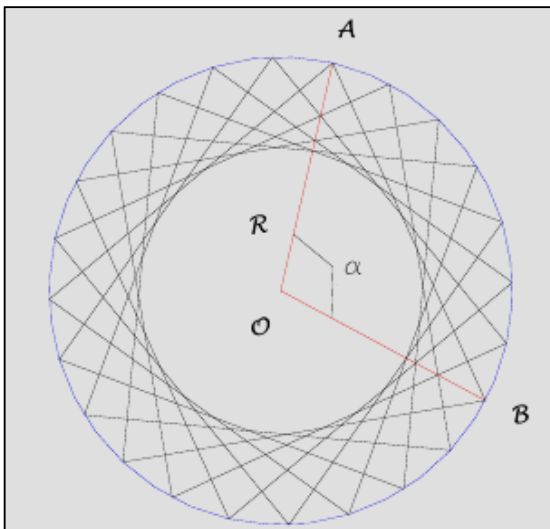


Fig. 4. Poligoane regulate stelate cu 24 de laturi ($p=5$ și $p=7$)

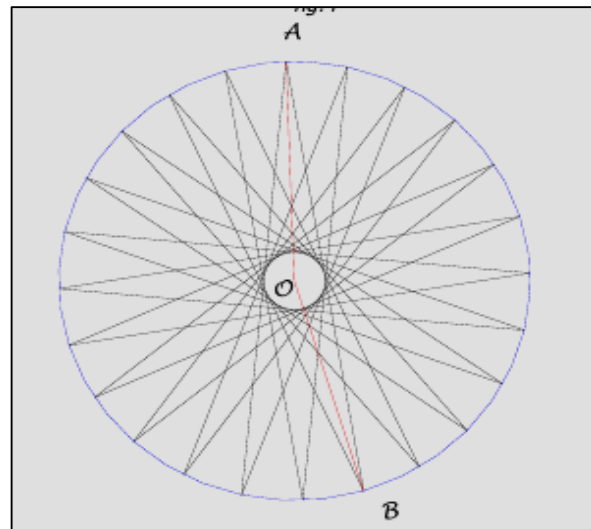


Fig. 5. Poligon regulat stelat cu 24 de laturi ($p=11$)

Calculul laturii și a apotemei unui poligon regulat convex sau stelat obținut prin împărțirea cercului în $2n+1$ părți egale și prin unirea punctelor de diviziune din p în p , revine la calculul apotemei și respectiv a laturii poligonului obținut prin împărțirea cercului în $4n+2$ părți și unirea punctelor de diviziune din q în q după ce am dedus pe q din relația

$$\frac{p}{2n+1} + \frac{q}{4n+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p+q = 2n+1$$

Invers, această relație ne permite să reducem calculul referitor la un poligon cu $4n+2$ laturi la calculul unui poligon cu $2n+1$ laturi. Deoarece un poligon cu $4n+2$ laturi

corespunde unui număr q impar, $2n+1-q$ va fi număr par, și relația $2p=2n+1-q$ ne va da un întreg p , prim cu $2n+1$ și căruia îi va corespunde un poligon cu $2n+1$ laturi pentru care va fi suficient să calculăm latura și apotema.

3. Poligoane regulate stelate cu n laturi

S-a demonstrat în că nu este posibilă construcția cu rigla și compasul a poligoanelor regulate cu 7, 9, 11, ... laturi.

Rezolvarea ecuațiilor

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + \dots + 1) = 0$$

$$x^9 - 1 = (x - 1)(x^8 + x^7 + \dots + 1) = 0$$

.

conduce la ecuații de gradul trei în soluțiile cărora intervin radicali de ordinul trei care nu se pot construi cu rigla și compasul.

În geometria asistată se computer aceste probleme de construcție au fost depășite. Cu ajutorul programelor de proiectare (AUTOCAD, CIVIL DESIGN, ș.a.) se pot construi poligoane cu orice număr de laturi înscrise în cercuri de rază dată astfel: Se trasează cercul de raza data și se cere poligonul regulat cu numărul de laturi dorit. În urma construcției programul redă lungimile laturilor, apotemei, a ariei sau a altor elemente necesare rezolvării problemei impuse.

Problemele de proiectare și de trasare în practică a acestor forme geometrice au fost depășite odata cu dezvoltarea acestor programe. Nimic nu mai este imposibil de realizat în domeniul construcției construcțiilor geometrice avînd acest mod de abordare practic, rapid și utilizabil în orice domeniu, la orice scară, dar vraja geometriei dispare.

Exemple

- înscrierea heptagonului regulat convex în cercul de rază 10: -fig.6

$$\Rightarrow l_7 = 8,6777; a_7 = 9,0097$$

- înscrierea în cerc a heptagonului regulat stelat cu:

a) $p=2 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 360^\circ / 7 = 102,856^\circ$ - fig.7

$$\Rightarrow l_{7s} = 15,6366; a_{7s} = 6,2349$$

b) $p=3 \Rightarrow \alpha = 3 \cdot 360^\circ / 7 = 154,284^\circ$

$$\Rightarrow l_{7s} = 19,4986; a_{7s} = 2,2252$$

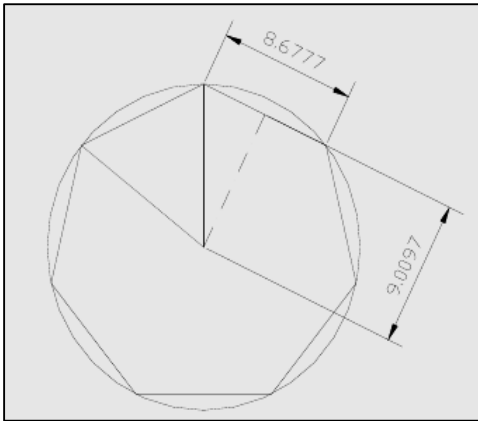


Fig.6. Înscrierea heptagonului regulat în cerc

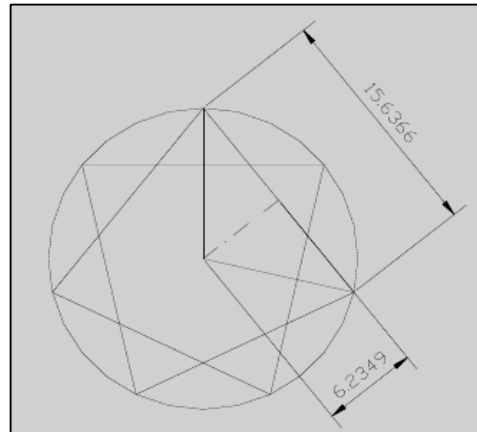


Fig.7. Înscrierea heptagonului regulat stelat în cerc ($p=2$)

- înscrierea nonagonului regulat convex în cercul de rază 10 - *fig.8*

$$\Rightarrow l_9 = 6,8404; a_9 = 9,3969$$

- înscrierea în cerc a nonagonului regulat stelat cu:

a) $p=2 \Rightarrow \alpha=2 \cdot 360^\circ/9=80^\circ$ - *fig.9*

$$\Rightarrow l_{9s} = 12,8558; a_{9s} = 7,6604$$

b) $p=4 \Rightarrow \alpha=4 \cdot 360^\circ/9=160^\circ$ - *fig. 9*

$$\Rightarrow l_{9s} = 19,6962; a_{9s} = 1,7365$$

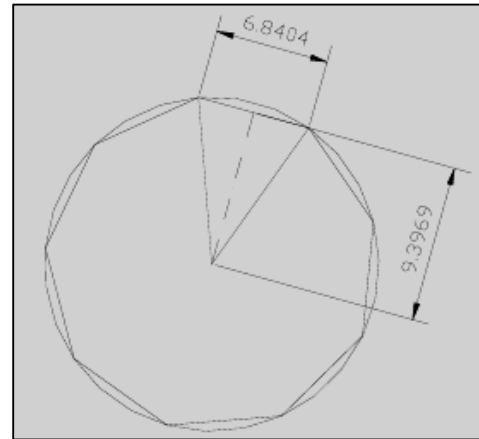


Fig. 8. Înscrierea nonagonului regulat în cerc

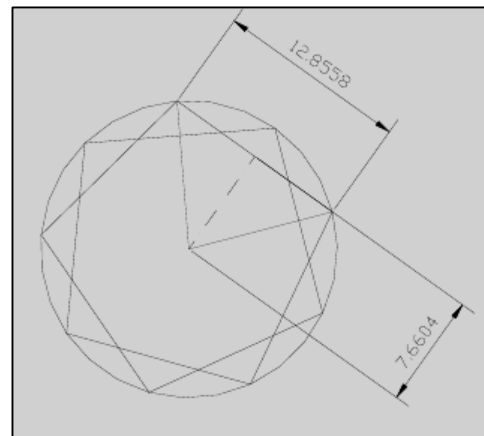
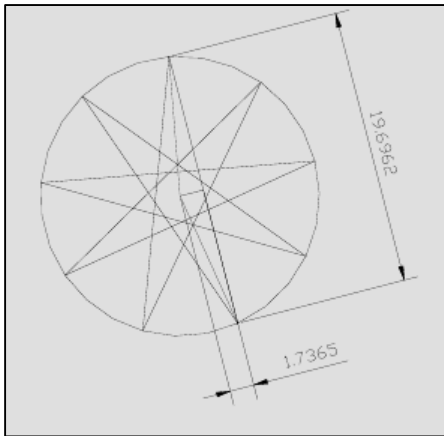


Fig.9. Înscrierea nonagonului stelat în cerc (p=2, respectiv p=4)

Bibliografie

- [1] A. Perepiolchina, *Geometrie*. Curs litografiat, Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 1953
- [2] J. Hadamard, *Leçon de géométrie élémentaire. Géométrie plane*. Ed. Tehnică. București. 1960
- [3] E. Colerus, *De la punct la a patra dimensiune*, Editura Științifică, București, 1967
- [4] N. N. Mihăileanu, *Leçon complémentaire de géométrie*, EDP București. 1976
- [5] N. Ghircoiașu, M. Iașinski, A. Viciu, *Fișe de geometrie și trigonometrie pentru elevi și absolvenți de licee*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1978
- [6] M. Pimsner, S. Popa, *Probleme de géométrie élémentaire*, EDP, București, 1979
- [7] D. Brânzei, *Geometrie circumstanțială*, Editura Junimea, Iași, 1983
- [8] I. Cuculescu, C. Ottescu, L. N. Gaiu, *Manual de géométrie, clasa a VII-a*. EDP, București, 1976