

SOCIETATEA ROMÂNĂ DE MATEMATICĂ APLICATĂ ȘI INDUSTRIALĂ

ROMAI EDUCATIONAL JOURNAL

VOL. 2 (2007)

**14TH CONFERENCE ON
APPLIED AND INDUSTRIAL MATHEMATICS
CAIM 2006
SATELLITE CONFERENCE OF ICM 2006**

PROCEEDINGS OF THE 6TH SECTION

În perioada 17 – 19 august 2006, la Universitatea din Chișinău s-a desfășurat cea de-a 14-a ediție a Conferinței de Matematică Aplicată și Industrială (CAIM 2006). Această Conferință a fost dedicată celei de-a 60-a aniversări a Facultății de Matematică și Informatică de la Universitatea de Stat din Chișinău, Republica Moldova.

Lucrările Conferinței au fost grupate în 6 secțiuni, și anume:

1. Algebră, logică, topologie; 2. Ecuații diferențiale ordinare și sisteme dinamice finit dimensionale; 3. Analiză funcțională. Ecuații cu derivate parțiale; 4. Metode analitice și numerice în mecanică. Matematică industrială; 5. Informatică teoretică; 6. Educație.

În cele 6 secțiuni ale Conferinței au fost prezentate aproape 150 de lucrări. Temele abordate au fost atât unele clasice, cât și unele de interes recent.

La secțiunea a 6-a – Educație – a fost înscrise 27 de lucrări. O parte dintre acestea au fost deja publicate într-un volum special, editat de Societatea de Științe Matematice din Republica Moldova.

Volumul de față conține 14 dintre lucrărilor secției de Educație CAIM 2006. În cele ce urmează, prezentăm pe scurt tendințele manifestate în aceste lucrări.

Două dintre articole (*O nouă concepție despre geometrie, Goana după radicali*) prezintă aspecte de istoria matematicii. Sunt evidențiate ideile care au condus la apariția topologiei, ca ramură a matematicii, respectiv importanța radicalilor pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice de grad mai mic decât 5.

Trei dintre lucrările prezentate (*O problemă și mai multe rezolvări, Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi, O cutie... dar nu a Pandorei!*) prezintă teme interesante pentru aplicațiile de la clasă și probleme adecvate acestora. În aceste lucrări, partea originală o constituie modul de alegere și ordonare a problemelor propuse.

Două lucrări (*Rolul problemelor în predarea – învățarea matematicii, Strategii euristice folosite în geometria elementară pentru relațiile de inegalitate între elementele unui triunghi*) reprezintă studii din perspectiva euristicii rezolvării problemelor. Comentariile făcute în aceste lucrări sunt utile înțelegerii mecanismelor prin care elevii ajung să rezolve probleme.

Alte trei lucrări (*Utilizarea jocurilor didactice în înțelegerea numerelor raționale, Predarea algebrei liniare pentru studenții la informatică, Învățarea prin proiecte: o strategie de pregătire a viitorilor profesori*) prezintă experimente de învățare activă. Aceste experimente au fost efectuate atât în mediul preuniversitar, cât și în mediul universitar.

O altă lucrare (*Gândirea liniară și influența acesteia asupra înțelegerii noțiunii de spațiu vectorial*) poate fi considerată lucrare de cercetare în domeniul Educației Matematice. Autorii, încă studenți, dezvoltă o interesantă teorie privind gândirea liniară.

Două dintre lucrări (*O metodă simplă de obținere a dreptei sau parabolei de regresie, Centrul forțelor paralele*) prezintă metode matematice în predarea-învățarea fizicii. Sunt explorate astfel metode mai simple de calcul.

Una dintre lucrări (*Metoda Taguchi și managementul calității*) oferă bazele teoretice pentru implementarea standardelor de calitate în educație.

Conferința de Matematică Aplicată și Industrială a oferit cadrul în care profesori și cercetători din stânga și din dreapta Prutului să poată avea un schimb de păreri privind problemele actuale ale învățământului matematic. Intensificarea schimburilor culturale și a cooperării între profesorii și cercetătorii din cele două țări poate contribui și ea la soluționarea acestor probleme.

*Prof. univ. dr. Adelina GEORGESCU
Președinte ROMAI*

Lector univ. dr. Cristian VOICA

O PROBLEMĂ ȘI MAI MULTE REZOLVĂRI

Liliana ANTONESCU
Școala nr. 1 *Liviu Rebreanu*
Mioveni, Argeș

Marius ANTONESCU
Școala cu clasele I – VIII
Leicești, Argeș

ONE PROBLEM AND SEVERAL SOLUTIONS

Abstract. The aim of this article is to present a few problems proposed at the school olympiads and their solutions. The main quality of these problems is that they can be solved using different methods. The solutions we present below were selected from the answers given during the contests. It is interesting to remark that sometimes the solutions given by the students are simpler than the ones given by the authors of the proposed problems. The explanation, at least in geometry lies, for example, in the fact that in order to propose a problem one has to start from a certain construction and obviously the solution will be according to that construction, ignoring other alternatives.

Această lucrare este o pledoarie pentru talent, inteligență, imaginație, creativitate și efort susținut. Ca profesor, trăiești o mare satisfacție atunci când întâlnești la elevi rezolvări originale ale unei probleme, altele decât cea „oficială”, unele chiar mai simple și mai frumoase. Scopul acestui articol este acela de a prezenta câteva probleme propuse la concursuri școlare, care pot fi rezolvate prin metode diferite.

O problemă poate avea rezolvări diferite, depinzând și de nivelul de studiu al elevului. Într-un fel rezolvă o problemă elevul când este în ciclul primar, altfel când este la gimnaziu și, posibil în alt mod, atunci când este la liceu. Nu este însă o regulă ca o problemă să poată fi totdeauna rezolvată prin mai multe metode.

În cele ce urmează vom prezenta câteva probleme propuse la olimpiadele școlare și diverse metode de rezolvare a acestora.

Problema 1. *Calculați* $\frac{0,(1) + 0,(2) + \dots + 0,(8)}{0,(11) + 0,(22) + \dots + 0,(88)}$.

Soluția 1. Observăm că

$$0,(1) = 0,1111\dots$$

$$0,(11) = 0,1111\dots$$

deci $0,(1) = 0,(11)$ și așa pentru fiecare din termenii corespunzători de la numărător și numitor. Astfel suma de la numărător este egală cu cea de la numitor și atunci valoarea raportului dat este egală cu 1.

Soluția 2. Prin simplificarea unei fracții obținem o fracție echivalentă cu cea dată. De aceea

$$\frac{0,(1)+0,(2)+\dots+0,(8)}{0,(11)+0,(22)+\dots+0,(88)} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{8}{9}}{\frac{11}{99} + \frac{22}{99} + \dots + \frac{88}{99}} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{8}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{8}{9}} = 1$$

Soluția 3. Calculând la numărător avem

$$0,(1)+0,(2)+\dots+0,(8) = \frac{1+2+\dots+8}{9} = \frac{8(8+1)}{9} = \frac{36}{9} = 4.$$

Un calcul similar la numitor are ca rezultat tot 4. Deci valoarea raportului inițial este 1.

Soluția 4. Folosim factorul comun

$$\frac{0,(1)+0,(2)+\dots+0,(8)}{0,(11)+0,(22)+\dots+0,(88)} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{8}{9}}{11\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{8}{9}\right)} = 1.$$

Problema 2. Fie a, b numere raționale pozitive. Dacă

$$\frac{2a+3b}{3a+2b} = \frac{3a+2b}{2a+3b},$$

atunci $a=b$.

Soluția 1. Folosim proprietățile șirului de rapoarte egale

$$\frac{2a+3b}{3a+2b} = \frac{3a+2b}{2a+3b} = \frac{2a+3b+3a+2b}{3a+2b+2a+3b} = \frac{5a+5b}{5a+5b} = 1.$$

Valoarea primului raport fiind 1, obținem că $2a+3b=3a+2b$ și apoi, scăzând în ambii membri ai egalității $2a+2b$, rezultă că $a=b$.

Soluția 2. Aplicând proprietatea fundamentală proporției date avem

$$(2a+3b)(2a+3b) = (3a+2b)(3a+2b),$$

adică

$$(2a+3b)^2 = (3a+2b)^2.$$

Cum numerele a și b sunt pozitive, ajungem la $2a+3b=3a+2b$ și apoi la $a=b$.

Soluția 3. Plecăm de la proporția dată și obținem o proporție derivată cu alți termeni, adunând numărătorii la numitori. Astfel avem

$$\frac{2a+3b}{3a+2b} = \frac{3a+2b}{2a+3b},$$

de unde

$$\frac{2a+3b}{3a+2b+2a+3b} = \frac{3a+2b}{2a+3b+3a+2b} \Rightarrow \frac{2a+3b}{5a+5b} = \frac{3a+2b}{5a+5b} \Rightarrow 2a+3b=3a+2b \Rightarrow a=b$$

Soluția 4. Din

$$\frac{2a+3b}{3a+2b} = \frac{3a+2b}{2a+3b} = k \Rightarrow 3a+2b = k(2a+3b)$$

și, folosind $(2a + 3b)^2 = (3a + 2b)^2$, ajungem la $(2a + 3b)^2 = k^2(2a + 3b)^2$. Obținem deci $k^2 = 1$, deci $k = 1$ și de aici se merge pe rezolvarea din soluția 1.

La geometrie întâlnim des probleme care se pot rezolva în mai multe moduri. Iată ca exemplu o problemă de geometrie propusă la olimpiada de matematică.

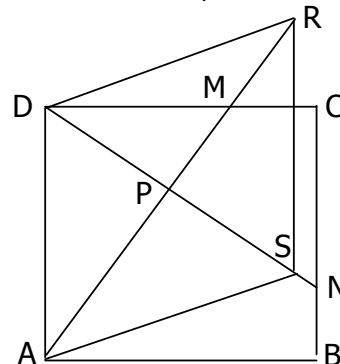
Problema 3. Fie pătratul ABCD. Pe laturile BC respectiv CD se consideră în interiorul lor punctele N, M astfel încât

$$\frac{BN}{NC} = \frac{CM}{MD}.$$

- 1) Demonstrați că dreptele AM și DN sunt perpendiculare.
- 2) Fie punctele $\{P\} = AM \cap DN$ și R, S situate pe (AP, respectiv (DP astfel încât AP = PR și DP = PS. Demonstrați că RS și BC sunt paralele.

Observație. Primul punct al problemei a fost demonstrat la fel de către toți elevii care au rezolvat corect problema. Al doilea punct a avut însă rezolvări multiple, chiar mai simple decât cea a propunătorului. Prezentăm câteva dintre acestea.

Soluția 1. Aceasta este soluția din barem și folosește inițial proprietățile triunghiului isoscel, astfel: $\triangle ADR$ isoscel, deci $\angle ARD \equiv \angle DAR \equiv \angle CDN$. $\triangle MDS$ este isoscel, deci $\angle MSD \equiv \angle CDN$. Rezultă $\angle MSD \equiv \angle ARD$ și cum $SD \perp AR$, rezultă $SM \perp DR$. Deci M este ortocentrul $\triangle RDS$ și atunci $DM \perp RS$. Cum $DM \perp BC$, avem $RS \parallel BC$.



Soluția 2. Folosim proprietatea punctelor situate pe mediatoarea unui segment de a fi egal depărtate de capetele segmentului. Cum AR este mediatoarea segmentului $[DS]$, rezultă că $AD = AS$, $RD = RS$. Din DS

mediatoarea segmentului $[AR] \Rightarrow AD = DR$, $AS = SR$. Deci $AD = DR = RS = AS$, ceea ce ne conduce la faptul că patrulaterul ADRS este romb și atunci $AD \parallel RS$. Adăugând la ceea ce am găsit că $AD \parallel BC$ obținem concluzia.

Soluția 3. Utilizând cazul de congruență L.U.L. se demonstrează ușor că $\triangle ADP \equiv \triangle RSP$ și de aici obținem că $\angle DAP \equiv \angle PRS$, aceste două unghiuri fiind alterne interne cu secanta AR. Aplicând teorema dreptelor paralele obținem că $AD \parallel RS$ și de aici concluzia cerută.

Soluția 4. Folosim teorema: Dacă într-un patrulater convex diagonalele se intersectează în părți congruente atunci el este paralelogram. De aceea, din $DP = PS$, $AP = PR$ rezultă că ADRS paralelogram, și de aici $AD \parallel RS$.

Problema 4. Se consideră ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ cu coeficienți întregi. Să se arate că dacă numerele a, b, c sunt impare, această ecuație nu are rădăcini raționale¹.

¹ Andreescu, T. și al., *Enunțurile și soluțiile problemelor date la etapa județeană și etapa pe țară a concursurilor de matematică pentru licee din anii 1975 – 1983*, Iași 1985, pag. 17.

Soluția 1. Cum $a, b, c \in 2\mathbb{Z} + 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}^*$, deci putem scrie

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 + bax + ca = 0 \Leftrightarrow (ax)^2 + b(ax) + ac = 0,$$

unde $b, ac \in 2\mathbb{Z} + 1$.

Notând $ax = y$, ecuația devine

$$y^2 + by + ac = 0 \quad (1).$$

Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației din enunț; avem

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y_1, y_2 \in \mathbb{Q}.$$

Coeficientul dominant al ecuației în y fiind 1 și ac număr întreg impar, rezultă că y_1, y_2 sunt întregi. Presupunem prin absurd că $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, deci $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$. Formulele lui Viète pentru ecuația (1) ne dau $y_1 + y_2 = -b$ și $y_1 y_2 = ac$. Avem

$$y_1, y_2 \in \mathbb{Q}, y_1 y_2 = ac \in 2\mathbb{Z} + 1 \Rightarrow y_1 y_2 \in 2\mathbb{Z} + 1 \Rightarrow y_1 + y_2 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow b \in 2\mathbb{Z},$$

ceea ce contrazice ipoteza că b este impar. Deci ecuația (1) nu admite rădăcini întregi și prin urmare ecuația din enunț nu admite rădăcini raționale.

Soluția 2. Este evident că 0 nu este rădăcină a ecuației date deoarece c este număr întreg impar. Presupunem prin reducere la absurd că ecuația dată admite o rădăcină rațională $x \in \mathbb{Q}^*$. Deci există $m, n \in \mathbb{Z}^*$, m, n prime între ele astfel încât $x = \frac{m}{n}$ este rădăcină a ecuației din enunț. Avem

$$a \cdot \frac{m^2}{n^2} + b \cdot \frac{m}{n} + c = 0 \Leftrightarrow am^2 + bmn + cn^2 = 0 \quad (2).$$

Deoarece $m, n \in \mathbb{Z}^*$ și sunt prime între ele, sunt de analizat următoarele cazuri:

a) $m \in 2\mathbb{Z}^*, n \in 2\mathbb{Z} + 1$. În acest caz (2) este imposibilă deoarece $am^2 + bmn \in 2\mathbb{Z}$ iar $cn^2 \in 2\mathbb{Z} + 1$.

b) $m \in 2\mathbb{Z} + 1, n \in 2\mathbb{Z} + 1$. Și în acest caz (2) este imposibilă deoarece $am^2 + bmn \in 2\mathbb{Z}$ pe când $cn^2 \in 2\mathbb{Z} + 1$.

c) $m \in 2\mathbb{Z} + 1, n \in 2\mathbb{Z}^*$. În acest caz $am^2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ pe când $bmn + cn^2 \in 2\mathbb{Z}$, ceea ce arată că (2) este imposibilă.

Cu aceasta am demonstrat că ecuația din enunț nu are rădăcini raționale.

Întâlnim uneori inegalități care pot avea o demonstrație directă mai dificilă și una ușoară, aplicând inegalități deja demonstrate.

Problema 5. Demonstrați că $(|a| + |b| + |c|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \right) \geq 9, \forall a, b, c \in \mathbb{Q}^*$.

Soluția 1. Această soluție are la bază, inițial un calcul direct ca apoi să se aplice o inegalitate des utilizată și anume: $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{Q}_+$

Astfel, avem

$$(|a| + |b| + |c|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \right) = 3 + \frac{a^2 + b^2}{|a| \cdot |b|} + \frac{b^2 + c^2}{|b| \cdot |c|} + \frac{c^2 + a^2}{|c| \cdot |a|} \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

Soluția 2. Folosim inegalitatea mediilor

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}, \forall x, y, z \in \mathbb{Q}_+.$$

Fie

$$x = |a|, y = |b|, z = |c|;$$

obținem

$$|a| + |b| + |c| \geq 3\sqrt[3]{|a| \cdot |b| \cdot |c|}.$$

Înlocuind în inegalitatea mediilor de mai sus

$$x = \frac{1}{|a|}, y = \frac{1}{|b|}, z = \frac{1}{|c|},$$

obținem

$$\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{|a| \cdot |b| \cdot |c|}}.$$

Înmulțim cele două inegalități membru cu membru și obținem inegalitatea cerută.

Soluția 3. Putem aplica inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz și anume

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}.$$

Pentru $n=3$ și

$$a_1 = \sqrt{|a|}, a_2 = \sqrt{|b|}, a_3 = \sqrt{|c|}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{|a|}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{|b|}}, b_3 = \frac{1}{\sqrt{|c|}},$$

din inegalitatea precedentă se obține

$$(|a| + |b| + |c|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \right) \geq 9, \forall a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

În următoarea problemă apare o inegalitate condiționată.²

Problema 6. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$, atunci

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a+b}{2ab} + \frac{a+c}{2ac} + \frac{b+c}{2bc} \geq 2$$

Soluția 1. Avem

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a+b}{2ab} + \frac{a+c}{2ac} + \frac{b+c}{2bc} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \quad (1)$$

Aplicând inegalitatea mediilor, adică inegalitatea $x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ și adunând relațiile obținute membru cu membru rezultă (1).

Observăm că această soluție nu demonstrează că inegalitatea (1) este strictă, adică expresia $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ nu are minim dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$.

Inegalitatea este strictă deoarece din $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ rezultă $a, b, c \in (0;1)$ și urmează că

² Bălăucă, A., Țicalo, I., *Probleme semnificative pentru concursurile școlare*, Ed. Remos, Chișinău, 1995.

$$a^2 + \frac{1}{a} > 2\sqrt{a}, \quad b^2 + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{b}, \quad c^2 + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{c},$$

de unde

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 2.$$

Soluția 2. Utilizând inegalitatea mediilor altfel decât în soluția precedentă se obține o inegalitate mai tare. Astfel avem

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[6]{abc}$$

și cum $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ rezultă

$$\sqrt[6]{abc} \leq \frac{1}{3}$$

și de aici

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 9 \quad (2)$$

Dar

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 27$ și $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 27$.

Unele ecuații în numere naturale pot fi rezolvate direct, folosind eventual divizibilitatea, sau gășind întâi o soluție și demonstrând apoi că aceasta este unică, ca în exemplul următor.³

Problema 7. Să se rezolve în \mathbf{N} ecuația $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{37}{16}$.

Soluția 1. Evident $z \neq 0$. Avem

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{37}{16} \Leftrightarrow x + \frac{z}{yz + 1} = \frac{37}{16} \quad (1).$$

Dacă $y = 0 \Rightarrow x + z = \frac{37}{16} \notin \mathbf{N}$. Deci $y \neq 0$ și $z \neq 0$ de unde rezultă

$$yz + 1 > z \Rightarrow \frac{z}{yz + 1} < 1 \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem

$$x = 2 \text{ și } \frac{z}{yz + 1} = \frac{5}{16} \Leftrightarrow 5yz + 5 = 16z$$

$$(5, 16) = 1 \Rightarrow z \mid 5 \Rightarrow z \in \{1, 5\}.$$

Se obține $x = 2$, $y = 3$ și $z = 5$.

³ Ibidem, pag 28.

Soluția 2. Găsim întâi o soluție și demonstrăm prin reducere la absurd că aceasta este unică. Avem

$$\frac{37}{16} = 2 + \frac{5}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}.$$

Ecuția dată este echivalentă cu

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}.$$

Dacă $x < 2$ obținem $\frac{1}{y + \frac{1}{z}} > 1$, imposibil. Dacă $x > 2$ obținem $\frac{1}{3 + \frac{1}{5}} > 1$, imposibil.

Deci $x = 2$ și ecuația devine

$$y + \frac{1}{z} = 3 + \frac{1}{5}.$$

Pentru $y < 3$ avem $\frac{1}{z} > 1$, imposibil, iar pentru $y > 3$ avem $\frac{1}{5} > 1$, imposibil.

Deci $y = 3$ și atunci $z = 5$.

În problemele de geometrie în care apare calculul distanței de la un punct la un plan putem folosi diverse metode de rezolvare. Două dintre acestea sunt prezentate în aplicația următoare.

Problema 8. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, $AB = 2a$ și $VA = a\sqrt{5}$. Calculați distanța de la punctul A la planul (VBC) .

Soluția 1. În $\triangle VNB$ dreptunghic cu $m(\angle VNB) = 90^\circ$ aplicând teorema lui Pitagora se obține $VN = 2a$. Analog în $\triangle VON$ dreptunghic $m(\angle VON) = 90^\circ$ vom avea $VO = a\sqrt{3}$. În piramida triunghiulară $VABC$ avem relația

$$A_{\triangle VBC} d[A; (VBC)] = A_{\triangle ABC} \cdot VO \quad (1)$$

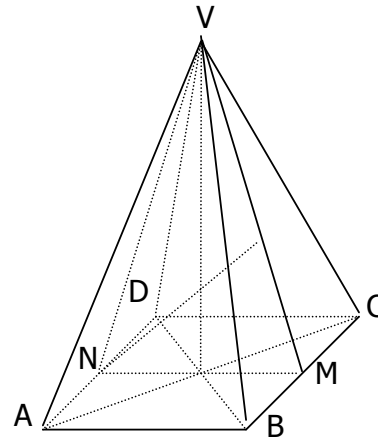
$$A_{\triangle VBC} = \frac{BC \cdot VN}{2} = 2a^2; \quad A_{\triangle ABC} = \frac{BA \cdot BC}{2} = 2a^2.$$

Conform relației (1) avem

$$2a^2 \cdot d[A; (VBC)] = 2a^2 \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow d[A; (VBC)] = a\sqrt{3}.$$

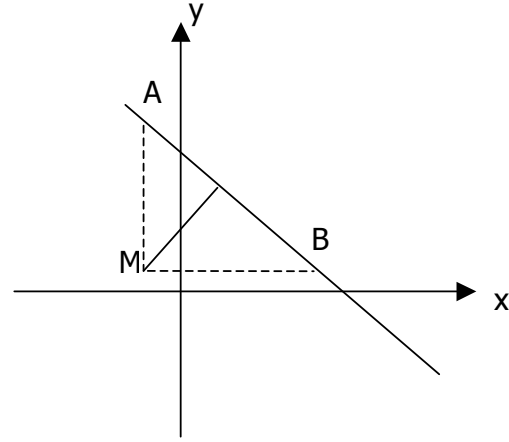
Soluția 2. $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (VBC) \Rightarrow d[A; (VBC)] = d[M; (VBC)]$. Fie $MT \perp VN$, $BC \perp MN$ și $BC \perp$. Atunci $BC \perp (VMN)$, deci $BC \perp MT$. Din $MT \perp VN$ și $MT \perp BC$ obținem $BC \perp (VBC)$, deci $d[M; (VBC)] = MT$. În $\triangle VNB$ dreptunghic cu $m(\angle VNB) = 90^\circ$, aplicând teorema lui Pitagora se obține $VN = 2a$, adică $\triangle VMN$ este echilateral. Analog, în $\triangle VON$ dreptunghic vom avea $VO = a\sqrt{3}$, deci $MT = a\sqrt{3}$. De aceea

$$d[M; (VBC)] = d[A; (VBC)] = a\sqrt{3}.$$



Problema 9. Fie funcția liniară $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{2}$ și punctul $M(-2; 4)$.
Determinați distanța de la punctul M la graficul funcției f .

Soluția 1. Calculăm $f(-2)$ și rezolvăm ecuația $f(x) = 4$; obținem astfel punctele $A(-2; 19)$ și $B(18; 4)$. Avem $MA = 15$; $MB = 20$; $AB = 25$. Construim $MC \perp AB$, deci $d(M; G_f) = MC$.
Avem $MC = \frac{MA \cdot MB}{AB} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$.



Soluția 2. Distanța poate fi găsită și ca înălțime a triunghiului determinat de punctul dat și punctele de intersecție ale reprezentării grafice cu axele de coordonate. Dificultatea constă în aflarea înălțimii unui triunghi oarecare, pentru care calculăm lungimile laturilor folosind, de regulă, formula distanței dintre două puncte cu coordonate cunoscute.

Soluția 3. Aceeași problemă se poate rezolva în modul următor. Fie $d_1 : 3x + 4y - 70 = 0$. Panta dreptei d_1 este $m_1 = -\frac{3}{4}$. Fie $d_2 \perp d_1$ astfel încât $M \in d_2$ și $d_2 \cap d_1 = \{C(x_0; y_0)\}$.
Deoarece $C(x_0; y_0) \in d_1$ avem

$$3x_0 + 4y_0 - 70 = 0 \quad (1)$$

Deoarece punctele M și C se găsesc pe dreapta d_2 , panta acestei drepte este $m_2 = \frac{y_0 - 4}{x_0 + 2}$

Cum $d_2 \perp d_1$, atunci $m_2 \cdot m_1 = -1$ și se obține

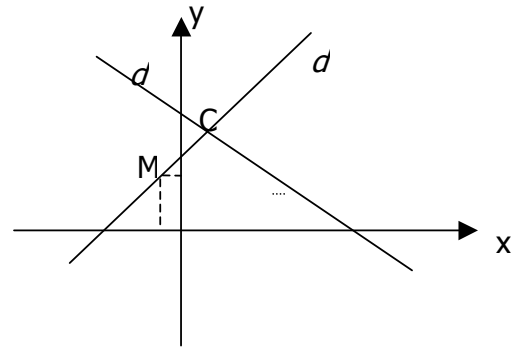
$$4x_0 - 3y_0 + 20 = 0 \quad (2).$$

Rezolvând sistemul format de relațiile (1) și (2) găsim

$$x_0 = \frac{26}{5} \text{ și } y_0 = \frac{68}{5},$$

deci $C\left(\frac{26}{5}; \frac{68}{5}\right)$. Din condiția $d_2 \perp d_1$ se observă că $d(M; G_f) = MC$. Avem

$$MC = \sqrt{\left(\frac{26}{5} + 2\right)^2 + \left(\frac{68}{5} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{1296}{25} + \frac{2034}{25}} = 12.$$



Soluția 4. Distanța cerută poate fi calculată și astfel.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{2} \Leftrightarrow 4y = -3x + 70 \Leftrightarrow 3x + 4y - 70 = 0$$

$$d(M; G_f) = \frac{|3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 + (-70)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-6 + 16 - 70|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-60|}{\sqrt{25}} = \frac{60}{5} = 12.$$

Prezentăm în continuare o problemă care se poate rezolva atât aritmetic cât și algebric.

Problema 10. *Dacă într-o sală de clasă elevii se așează câte 2 într-o bancă, rămân 3 în picioare, iar dacă așează câte 3 într-o bancă, rămân 5 bănci goale. Câți elevi și câte bănci sunt în acea clasă?*

Soluția 1. Presupunem că elevii sunt așezați câte 2 într-o bancă, 3 elevi fiind în picioare. Completăm fiecare bancă cu câte un elev pentru a avea câte 3 elevi în bancă astfel: distribuim mai întâi elevii care sunt în picioare, apoi pe rând din bănci până rămân 5 bănci goale. În felul acesta se observă că au fost distribuiți $3 + 5 \cdot 2 = 13$ elevi (acesta fiind și numărul de bănci cu câte 3 elevi). Se obțin: $3 \cdot 13 = 39$ elevi și $13 + 5 = 18$ bănci.

(Prin același procedeu se poate presupune că elevii sunt câte 3 în bancă, iar 5 bănci sunt goale și se elimină câte un elev din fiecare bancă pentru a obține câte 2 elevi în bancă și 3 elevi în picioare, numărul elevilor care au fost eliminați fiind $3 + 5 \cdot 2 = 13$.)

Soluția 2. O soluție algebrică este următoarea. Notăm b numărul băncilor. Numărul elevilor clasei se poate exprima în două moduri astfel: $2b + 3$ sau $3(b - 5)$, în funcție de modul de distribuire în bănci. Obținem astfel ecuația

$$3(b - 5) = 2b + 3,$$

de unde $b = 18$ (bănci) și $2 \cdot 18 + 3 = 39$ elevi

Soluția 3. Soluția următoare folosește sisteme de ecuații.

Notând x numărul elevilor și y numărul băncilor, se obține sistemul:

$$\begin{cases} 2y + 3 = x \\ 3(y - 5) = x \end{cases}$$

cu soluția $x = 39$ și $y = 18$.

În concluzie, în matematica școlară există o diversitate de probleme în rezolvarea cărora putem aplica mai multe metode diferite de rezolvare.

Bibliografie

- [1] Bălăucă, A., Țicalo, I., *Probleme semnificative pentru concursurile școlare*, Editura Remos, Chișinău, 1995
- [2] Andreescu, T., Bătinețu, D.M., Chiriță, M., Dăneț, T., Gheorghită, V., Maftai, I.V., Miheț, D., Popescu, I., Tomescu, I., Țena, M., *Enunțurile și soluțiile problemelor date la etapa județeană și etapa pe țară a concursurilor de matematică pentru licee din anii 1975 – 1983, Iași 1985.*
- [3] ***, *Dicționar de matematică*, Editura Danubius, București.
- [4] Radu, D., Radu, E., *Matematică – manual pentru clasa a VIII-a*, Editura Teora, 2000.

GÂNDIREA LINIARĂ ȘI INFLUENȚA ACESTEIA ASUPRA ÎNȚELEGERII NOȚIUNII DE SPAȚIU VECTORIAL

**Iulia Teodora BANU, Gabriela-Doina POPA, Bianca ROMAN,
Oana ȘERBAN, Ioan-Alexandru TĂTARU**

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

THE LINEAR THINKING AND ITS INFLUENCE UPON UNDERSTANDING VECTOR SPACES

ABSTRACT. The paper analyses students' perception of linearity in an attempt to connect this perception to the understanding of the notions specific for vector spaces. We designed two questionnaires that we applied to students of various ages. We identified five degrees of progression from linearity to non-linearity: translation, unidimensional additivity, additivity and translation, bidimensional additivity, and multiplicity or non-linear thinking. The results of this study can be used for a better approach of teaching mathematics. It can be also used for the study of the influence of linear thinking in teaching other disciplines.

1. Introducere

Un interesant studiu privind „gândirea liniară” a fost inițiat de o echipă de cercetători belgieni, condusă de Dirk De Bock (v., de ex., [1] și [3]). Aceștia au analizat în detaliu aspecte legate de proporționalitate.

Una dintre întrebările propuse în cadrul acestui studiu este următoarea: “Se dă un patrat cu lungimea laturii l . Ce se va întâmpla cu aria pătratului dacă latura se dublează? Dar dacă latura se triplează? Cum se modifică perimetrul în aceleași condiții?”

Cele mai multe raspunsuri au fost greșite și anume :“Aria se dublează/ se triplează și ea.” Acest răspuns indică un mod de gândire liniar având în vedere faptul că se ignoră aspectul calitativ al problemei, și anume semnificația noțiunilor de arie și volum. În schimb este realizată doar o translatare a unor ipoteze date.

Există deci, la elevii de vârstă școlară, ceea ce echipa de cercetători belgieni a numit „iluzia de liniaritate”. Un alt studiu pe această temă este [2].

2. Metode de investigare

Spre deosebire de studiile citate anterior, lucrarea noastră are ca scop rafinarea ideii de liniaritate, prin evidențierea unor trepte ale acestui mod de gândire.

Am realizat acest studiu în două faze, folosind ca metodă de investigare chestionarul, aplicat unui eșantion alcătuit din 200 de persoane - elevi din clasele VII-XII și studenți din anii I-IV ai unor școli/ facultăți cu profil real. În prima etapă, subiecții au fost solicitați să rezolve 4 tipuri de itemi: completare de matrice, de șiruri numerice, de șiruri de simboluri și de figuri geometrice (vezi Anexa 1). Deoarece există o infinitate de moduri în care se poate răspunde la o astfel de întrebare, noi le-am cerut subiecților să

folosească raționamentul care li se pare cel mai natural. Cu scopul de a valida concluziile din prima fază și de a oferi o mai bună imagine asupra modului de gândire liniar, în a doua etapă am adăugat și alte tipuri de itemi, de exemplu: „exprimarea modului de calcul a plății unei facturi telefonice cu ajutorul unei funcții” (vezi Anexa 2). În ambele faze, chestionarele au conținut o secțiune dedicată testării cunoștințelor elementare de spații vectoriale - definiții, exemple, noțiuni și rezultate importante.

3. Gradele de liniaritate a gândirii

În accepțiunea noastră, gândirea liniară reprezintă *predispoziția indivizilor de a completa șiruri numerice sau de simboluri prin repetarea termenilor dați sau folosind combinații liniare ale acestora, precum și tendința de a reacționa asemănător în situații aparent similare.*

Am identificat cinci grade de liniaritate în gândire, și anume:

1. translația sau gândirea pur liniară;
2. aditivitatea unidimensională;
3. translația și aditivitatea;
4. aditivitatea bidimensională;
5. multiplicativitatea sau gândirea neliniară;

Pentru interpretarea statistică a rezultatelor am asociat acestei ierarhizări note de la unu la cinci (1-translație, 5-multiplicativitate).

Pentru o mai bună ilustrare a gradelor identificate vom analiza posibilitățile de completarea a șirului 2, 4, ... (itemul 6 din chestionar).

1. Primul grad de liniaritate - *translația sau gândirea pur liniară* - se manifestă în momentul în care subiecții completează șirurile prin repetarea termenilor dați sau translația unei figuri. Prin translație, șirul este completat 2, 4, 2, 4, ...

$$\boxed{2, 4,} \quad \boxed{2, 4,} \quad \boxed{2, 4,} \quad \dots$$

Considerăm că secvențele rezultate în urma completării șirurilor ar putea avea și o interpretare geometrică - de unde și denumirile date gradelor de liniaritate. Considerăm corespondența: termenului 2 din șir îi asociem punctul A_1 de afix $2+0*i$ și, analog, lui 4 îi atribuim A_2 de afix $4+0*i$. Graficul asociat șirului (Fig 1) conține doar punctele A_1 și A_2 deoarece al treilea termen corespunde tot punctului A_1 , al patrulea tot punctului A_2 s.a.m.d.

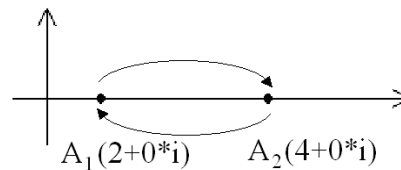


Fig.1.

2. Al doilea grad de liniaritate - *aditivitatea unidimensională* - apare în momentul în care un șir este văzut ca o progresie aritmetică de o anumită rație. De exemplu, șirul 2, 4, ... este completat 2, 4, 6, 8, ...

$$\boxed{2, 4,} \quad \overset{+2}{\curvearrowright} \quad 6, \quad \overset{+2}{\curvearrowright} \quad 8, \quad \overset{+2}{\curvearrowright} \quad 10, \quad \dots$$

Geometric, termenii șirului reprezintă punctele A_1, A_2, A_3 după cum se poate observa în Fig 2. Interpretăm că acest grad de liniaritate corespunde unei creșteri pe orizontală.

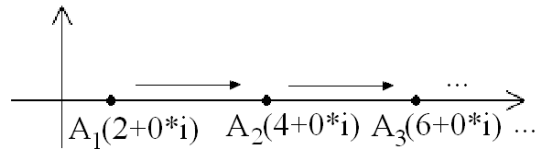


Fig. 2.

3. Următorul grad de liniaritate identificat este *translația și aditivitatea*. Termenii șirului 2, 4,.. completat 2, 4, 2, 6, 2, 8 ... pot fi grupați în perechi de numere corespunzând punctelor din Fig 3. Acest tip de completare corespunde geometric unei creșteri pe verticală.

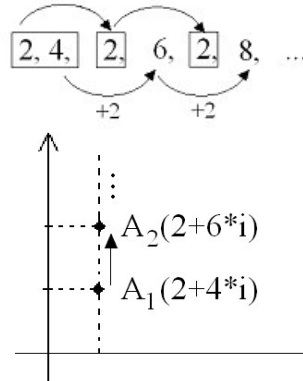
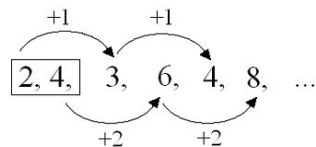


Fig. 3.

4. Următorul grad de liniaritate considerat este *aditivitatea bidimensională*. În acest caz, șirul 2,4,... este completat 2, 4, 3, 6, 4, 8,... Ca și în cazul anterior, se pot considera perechile (2,4), (3,6), (4,8).



Termenul general al șirului este reprezentat de $z_n = (x_n, y_n)$ unde $x_n = x_{n-1} + 1$, $y_n = y_{n-1} + 2$, $n \geq 2$, $x_1 = 2$, $y_1 = 4$. Se constată astfel o creștere pe ambele dimensiuni.

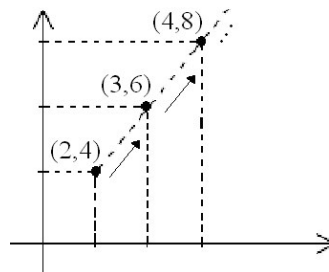
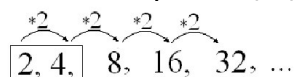


Fig. 4.

5. Ultimul grad de liniaritate identificat este denumit *multiplicativitate*; el sugerează un mod neliniar de gândire. Șirul 2, 4,... este completat 2, 4, 8, 16,...



Geometric, acest mod de completare îl interpretăm ca pe o funcție exponențială (Fig. 5).

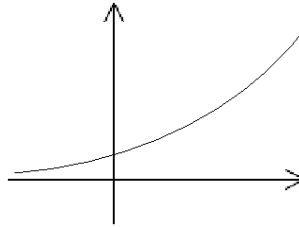


Fig. 5.

Exemplificare pentru matrici:

	1. Translație			2. Adit. unidim.						
1	a	a		1	a	a				
				1	a	a				
				1	a	a				
				1	a	a				
3. Adit și transl.			4. Adit. bidim.			5. Multiplicativitate				
1	a	a		1	a	a		1	a	a
1	b	a		2	3a	4a		1	a²	a²
1	c	a		3	5a	7a		1	a³	a³
1	d	a		4	7a	10a		1	a⁴	a⁴

fig. 6

Exemplificare pentru figuri geometrice:

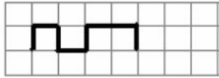
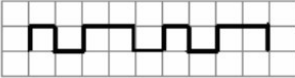
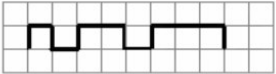
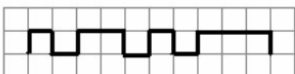
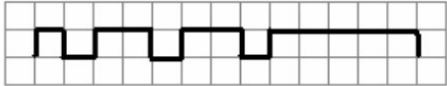
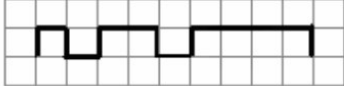
	1. Translație	
		
2. Aditivitate unidim.		3. Aditivitate și translație
		
4. Aditivitate. bidim.		5. Multiplicativitate
		

Fig. 7

Exemplificare pentru itemul "Desenați mingea după aruncare":

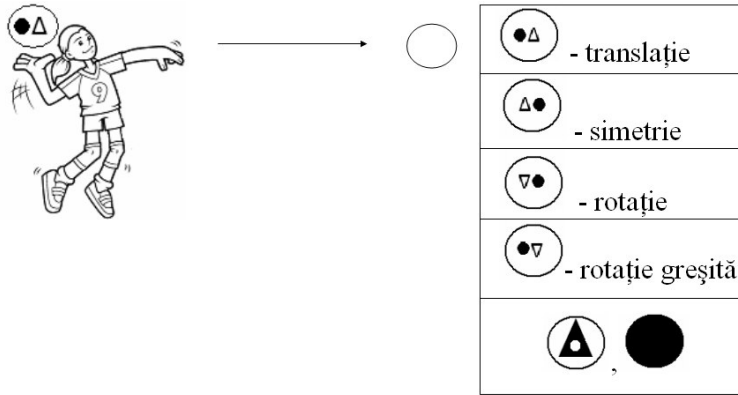


Fig. 8.

4. Concluzii

1. Gândirea liniară se manifestă mai degrabă în lucrul cu simboluri decât în cel cu numere. O posibilă consecință a acestui fapt o reprezintă dificultatea în lucrul cu elemente ce țin de spații vectoriale.

Instrumentul care a stat la baza obținerii acestei concluzii a fost diagrama de tip *box and whiskers*, având ca rol redarea distribuției răspunsurilor. În figura 9, pe axa verticală sunt ordonate punctajele (de la 0 la 5) iar de-a lungul axei orizontale sunt plasate 5 diagrame *box and whisker*: primele 4 corespund celor 4 tipuri de itemi din chestionarul primei faze - completare de matrice (T1_4), de șiruri numerice (T6_17), de șiruri de simboluri (T18_21) și de figuri geometrice (T5_25) iar ultima redă cazul mediu (TOTALGL).

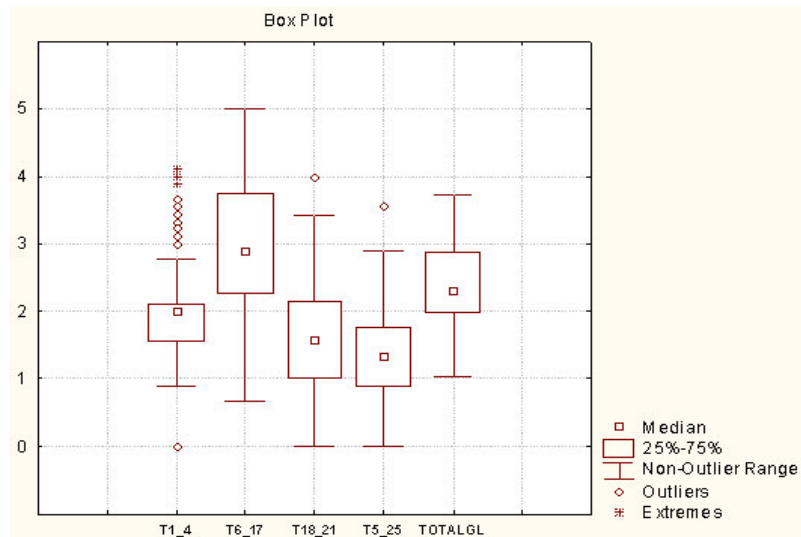


Fig. 9

Se observă că cele mai bune punctaje, în sensul utilizării unei gândiri tinzând spre neliniaritate, s-au obținut la întrebările ce presupun lucrul cu numere. Această situație este justificabilă, în condițiile în care operarea cu numere este cea mai des întâlnită în modul de prezentare al informațiilor matematice. În ceea ce privește lucrul cu simboluri sau reprezentările geometrice, punctajele s-au situat între 0.9 și 2.2 din 5, indicând o tendință mai accentuată de liniaritate în gândire.

Această situație ar putea fi explicată prin faptul că în școală se lucrează foarte mult cu numere și mai puțin cu simboluri - de-abia în clasa a 12-a sunt introduse legile de compoziție. Sugestia noastră în vederea îmbunătățirii capacităților de înțelegere, reținere și operare cu noțiuni de spații vectoriale este exersarea lucrului cu simboluri începând din primele clase de liceu.

2. Conștientizarea gândirii liniare duce la îmbunătățirea gândirii neliniare.

Acest fapt rezultă în urma analizării tabelului de corelații (Tabelul 1) în care am evidențiat coeficienții semnificativi din punct de vedere statistic. Unii dintre aceștia indică faptul că persoanele care au cunoștințe de spații vectoriale obțin punctaje mai mari în ceea ce privește gradul de neliniaritate al gândirii

	T1_4	T6_14	T16-18	T5_20	TOTALGL	TOTALSV
T1_4	1.00	0.08	0.22	0.27	0.46	0.15
T6_14	0.08	1.00	0.19	0.02	0.82	0.42
T16-18	0.22	0.19	1.00	0.33	0.52	0.25
T5_20	0.27	0.02	0.33	1.00	0.45	0.20
TOTALGL	0.46	0.82	0.52	0.45	1.00	0.47
TOTALSV	0.15	0.42	0.25	0.20	0.47	1.00

Tabelul 1

3. Transformările liniare sunt realizate mai ușor pe dreaptă decât în plan sau în spațiu.

Itemul 26 din chestionarul fazei a doua cere completarea, pornind de la un desen dat, a unei figuri reprezentând un segment având lungimea egală cu dublul laturii paralele cu axa Ox a triunghiului dat. 30% din respondenți au optat pentru construirea unui nou triunghi păstrând dimensiuna inițială (două pătrățele) corespunzătoare laturii Oy și numai 12% au optat pentru varianta dublării acestei dimensiuni. Restul variantelor de răspuns nu s-au încadrat în niciuna dintre aceste două situații și nici nu au oferit posibilitatea considerării vreunei alte variante.

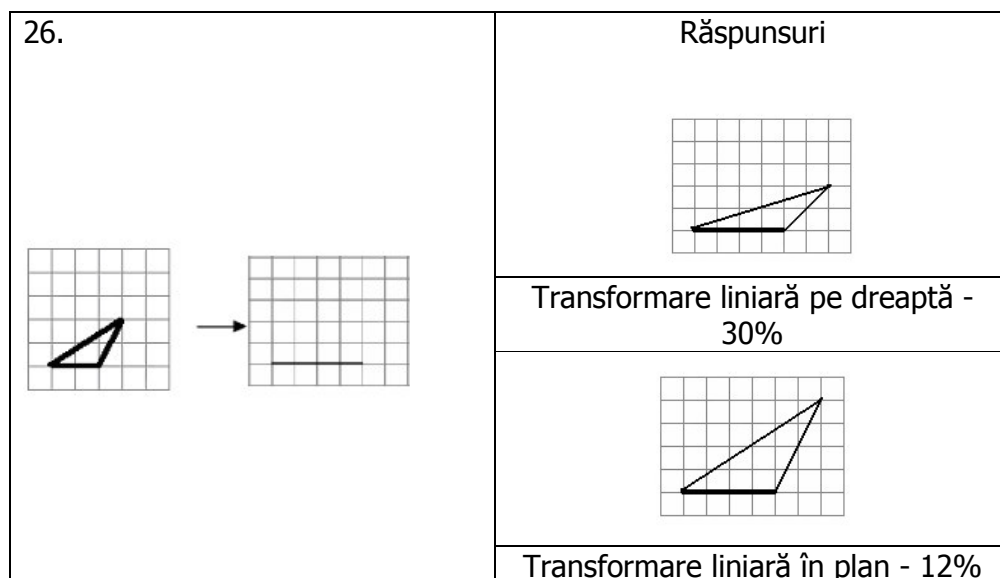


Fig. 10

4. În cazul completării de șiruri numerice și al completării de matrici este mai des întâlnită gândirea aditivă în detrimentul celei de grad 1 de liniaritate (fig. 11, fig. 12). Spre exemplu, șirul $2, 4, \dots$ este completat mai des $2, 4, 6, 8, \dots$ decât $2, 4, 2, 4, \dots$. În schimb, în cazul completării șirurilor geometrice și a șirurilor de simboluri este mai des întâlnită gândirea pur liniară. Având în vedere că modul de gândire liniar facilitează învățarea spațiilor vectoriale sugerăm îmbinarea modului clasic de predare cu metode bazate pe reprezentări și exemple geometrice. Un argument în plus care susține această recomandare provine din analiza răspunsurilor la întrebările de spații vectoriale, care indică faptul că operațiile cu vectori au fost ușor reținute mai ales de la cursurile de fizică din liceu.

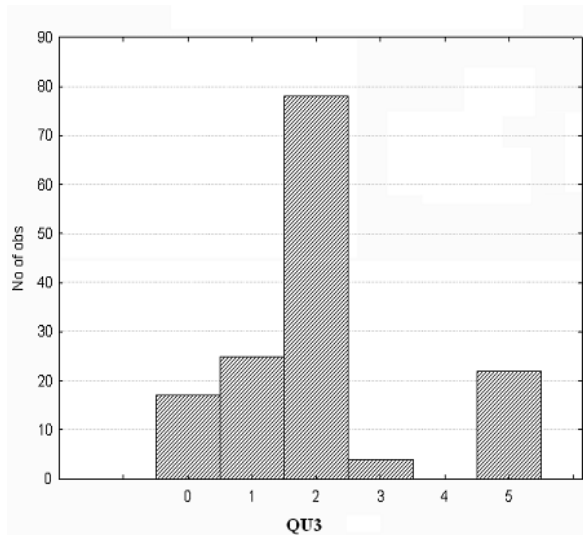


Fig. 11. Completare de matrice

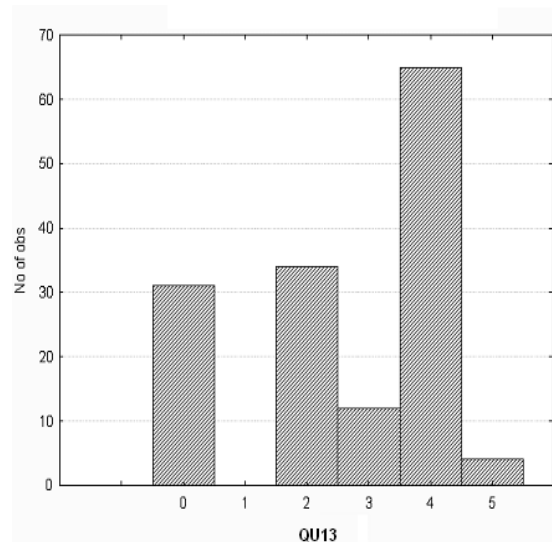


Fig. 12. Completare de șiruri de simboluri

5. Modul de gândire liniar poate fi ușor modificat către unul complex, care permite învățarea unor noțiuni cu grad sporit de abstractizare.

Aceasta se observă examinând răspunsurile primite la întrebările pe care le-am denumit "induse". Un astfel de exemplu este itemul 7 din chestionarul corespunzător fazei 1 care solicită completarea șirului $1, 2, 4, \dots$ și este imediat următor itemului în care se cere completarea șirului $2, 4, \dots$. Cele două probleme diferă doar prin prezența termenului 1 și alăturarea lor are ca scop modificarea tipului de gândire către unul neliniar. Se observă că o mare parte din respondenții care au oferit un răspuns de tip aditiv la itemul 6 au raționat multiplicativ la întrebarea indusă (fig. 13, fig. 14).

Un aspect interesant ce poate fi tratat în cadrul unui viitor studiu pe această temă este tipul natural de gândire caracteristic indivizilor de gen masculin și a celor de gen feminin și predispoziția celor două genuri pentru reținerea și operarea corectă cu elemente de spații vectoriale.

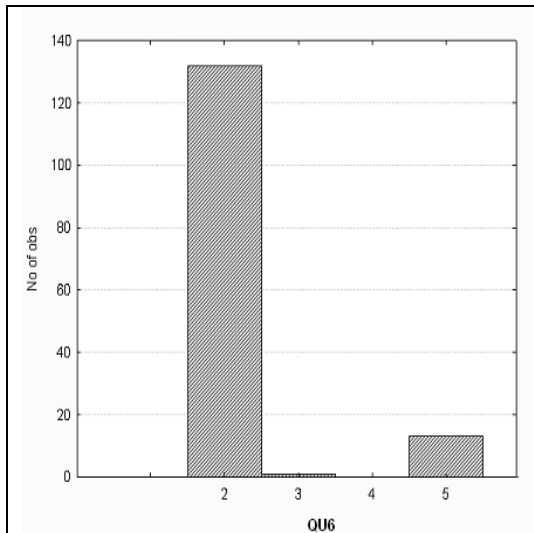


Fig 13. Întrebare inițială: 2,4,...

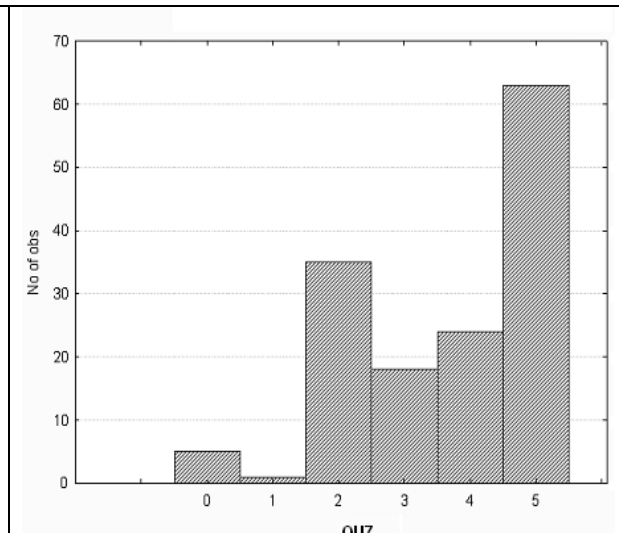


Fig 14. Întrebare indusă: 1,2,4,...

Această idee este urmarea unei *analize de tip Cluster* în care am obținut diagrama din fig. 15. Aceasta confirmă observația privind distincția între lucrul cu numere și cel cu simboluri – se observă grupările T1-4, T16-18 și T5-20, apoi separat T6-14 și ultima grupare Definiții și Noțiuni. În plus, faptul că întrebările la secțiunea legată de spații vectoriale formează un cluster separat poate fi interpretat prin aceea că *cele două părți ale chestionarului, pe acest eșantion, activează părți diferite ale creierului.*

În urma unei analize pe genuri a răspunsurilor, una dintre concluziile fazei 1 a fost aceea că *în ceea ce privește neliniaritatea gândirii, fetele au obținut scoruri mai mari decât băieții, dar în ceea ce privește spațiile vectoriale băieții au obținut punctaje mai mari.* Rezultatele din faza a doua, însă, au infirmat această ipoteză.

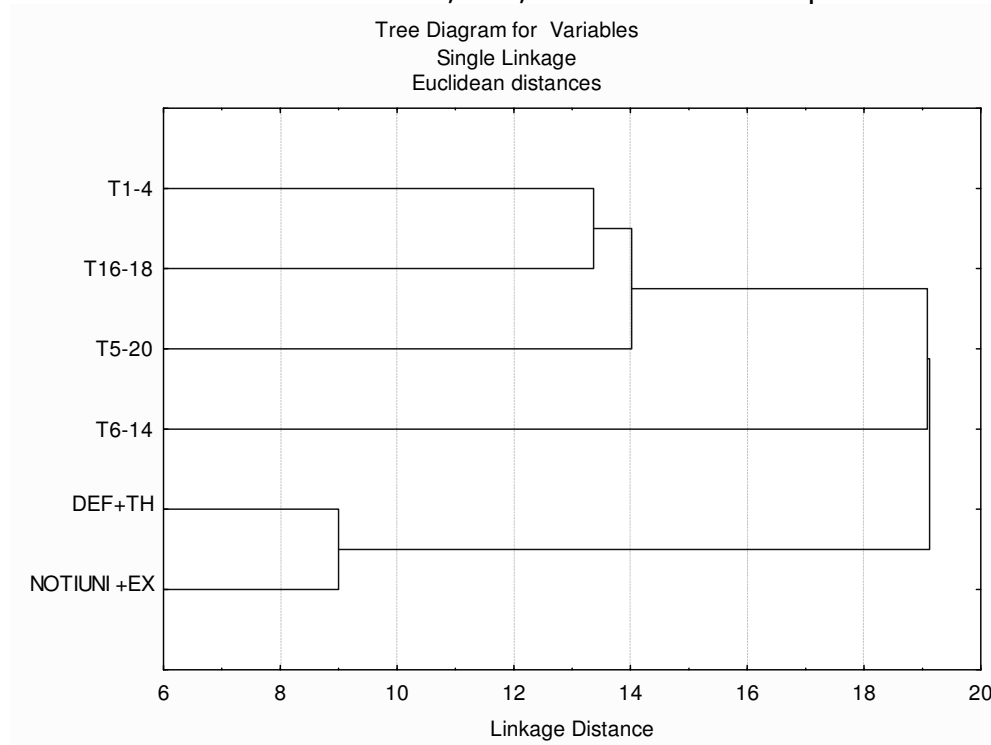


Fig. 15. Analiza Cluster

Bibliografie

- [1] De Bock, D. et al., *Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school student's errors*, Educational Studies in Mathematics, **50** (2002), 311- 334.
- [2] Stupariu, M. S., Voica, C., *Un studiu privind învățarea spațiilor vectoriale*, ROMAI Educational Journal **1** (2006), 64 – 72.
- [3] Van Dooren, W. et al., *Remedying secondary school student's illusion of linearity: A developmental research*, Proceedings PME 2002, vol. **1**, Norwich, UK, 370-402.

Anexa 1.

Completați tabelele:

1.

1	1	1
-	-	-
-	-	-

2.

a	a	a
-	-	-
-	-	-

3.

1	a	a
-	-	-
-	-	-

4.

1	a	a ²
-	-	-
-	-	-

5. Desenați mingea după aruncare.



Completați șirurile.

6. 2, 4,

7. 1, 2, 4,

8. 1, 4,

9. 1, 4, 9,

10. 3, 6,

11. 0, 1, 8, 27,

12. 2, 6, 12, 20,

13. 1, 3, 6, 10,

14. 0, 2, 8, 18,

15. Ai observat că dacă vrei să ajungi la școală la ora 8 trebuie să pleci de acasă la ora 7.
La ce ora trebuie să pleci de acasă dacă vrei să ajungi la școală la ora 16.

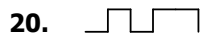
Completați șirurile.

16. * °

17. * ° * *

18. 12112

Continuați desenele.



21. Cum procedezi pentru a reține o formulă ?

22. Preferi un stil de viață în care să ai tot timpul de-a face cu situații noi, sau mai degrabă rutina ?

Anexa 2.

Completați matricile.

1.

1	1	1

2.

a	a	a

3.

1	a	a

4.

1	a	a ²

5. Desenați mingea după aruncare.



Completați șirurile următoare cu câte 3 termeni și indicați regula folosită (Nu exista raspuns gresit!)

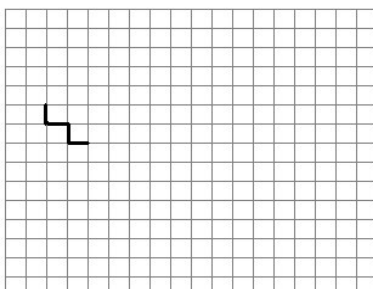
- 6. 2, 4,
- 7. 1, 2, 4,
- 8. 1, 4,
- 9. 1, 4, 9,
- 10. 3, 9,
- 11. 0, 1, 8, 27,
- 12. 2, 6, 12, 20,
- 13. 1, 3, 6, 10,
- 14. 1, -2, 4,
- 15. 1, 1/2,
- 16. -1, x,
- 17. -1, 1/2,

Completați șirurile următoare.

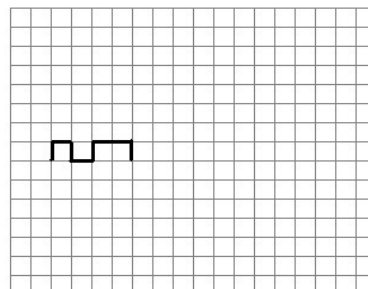
- 18. * °
- 19. * ° * *
- 20. 12112
- 21. ▲ □ ▲ ▲ □

Continuați desenele.

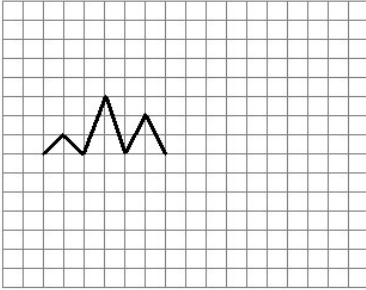
22.



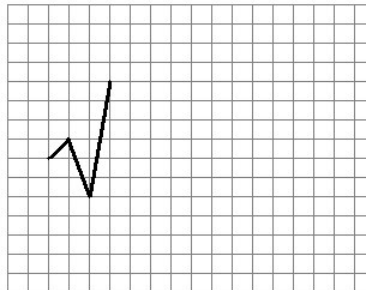
23.



24.

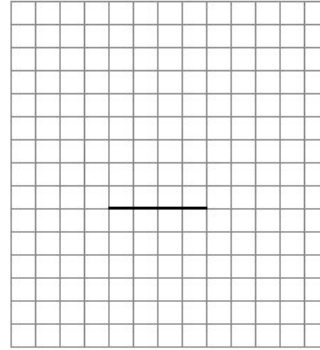
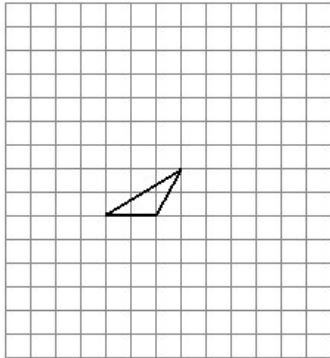


25.

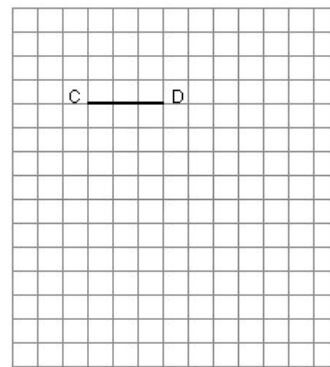
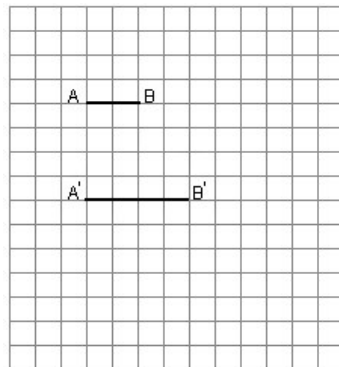


Completați careurile din partea dreaptă prin transformarea figurilor date în careurile din partea stângă.

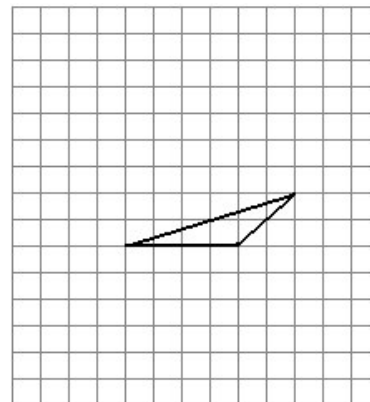
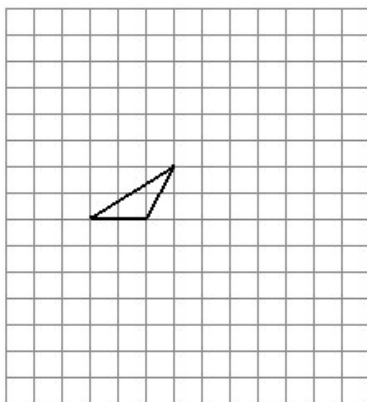
26.

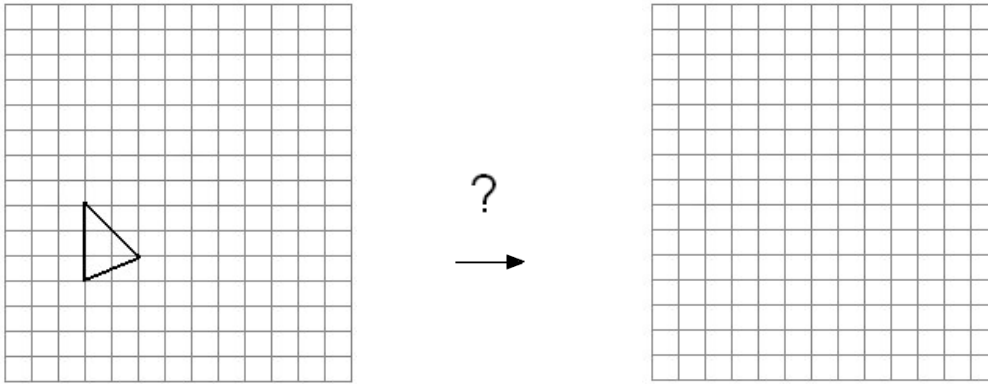


27.



28. Completați careul conform modelului.





- 29.** O companie de telefonie mobilă are următorul regim de facturare pentru abonamentul A1:
- pachet de bază cu 40 minute incluse care se facturează cu 0,02\$ / minut.
 - fiecare minut vorbit după consumarea minutelor incluse este facturat cu 0,15\$ / minut.
- Găsiți o formulă care să redea procedeul de calcul al facturii telefonice pentru abonamentul A1.
- 30.** O persoană are de plătit o factură telefonică în valoare de A \$. Pentru fiecare zi de întârziere a plății se aplică o penalizare de $p\%$ din suma de plată pentru ziua anterioară. Care este valoarea facturii după n zile de întârziere?
- 31.** Definiți noțiunea de "spațiu vectorial".
- 32.** Dați câteva exemple de spații vectoriale.
- 33.** Precizați câteva noțiuni pe care le-ați reținut legate de teoria spațiilor vectoriale.
- 34.** Enunțați acea teoremă de spații vectoriale care vi se pare cea mai importantă.
- 35.** În cadrul căror materii v-au fost predate noțiuni de spații vectoriale?
- 36.** Ați mai întâlnit aceste noțiuni și în alte situații?
- 37.** Ce grad de dificultate considerați că are teoria spațiilor vectoriale?
- 38.** Ați reținut cu ușurință noțiunile de spații vectoriale? De ce?

REZOLVAREA ECUAȚIILOR ÎN NUMERE ÎNTREGI

Georgeta COJOCARU

Ion COJOCARU

Școala Generală *Liviu Rebreanu*
Mioveni, Argeș

HOW TO SOLVE A DIOPHANTINE EQUATION?

Abstract. To solve a Diophantine equation is an ancient and important chapter in the theory of numbers. The paper presents a few methods to solve such equations and highlights the contribution of some scientists like Diofant, Pierre Fermat, René Descartes in developing the theory of solving an equation within the set of whole numbers. The paper contains applications in the field of solving an equation with an unknown term or with two or three unknown terms.

Introducere

Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi este un capitol vechi și important din teoria numerelor. În dezvoltarea teoriei rezolvării ecuațiilor în numere întregi, o contribuție de bază a avut-o Diofant (sec. III – IV î. Hr.). Lui Diofant i se atribuie afirmația (fără demonstrație) potrivit căreia orice număr este suma a cel mult patru pătrate, cu alte cuvinte, dat fiind $n \in \mathbf{N}$, ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = n$ are mereu soluții în mulțimea numerelor naturale.

Posibilitatea descompunerii numerelor de forma $A = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$ ca sumă de pătrate în două moduri, adică

$$A = (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2$$

sau

$$A = (xz - yt)^2 + (xt + yz)^2$$

tot lui Diofant din Alexandria i se datorează.

Problema generală a rezolvării în numere întregi a ecuației $x^2 + y^2 = z^2$ s-a pus în secolul VI î. Hr. în Școala lui Pitagora.

Contribuții remarcabile la dezvoltarea teoriei numerelor a avut și Pierre Fermat, el afirmând că ecuația $x^2 + y^2 = p$ admite soluții în numere întregi dacă p este prim de forma $4k + 1$. O replică a acestei afirmații este teorema lui René Descartes: *Un număr de forma $4n - 1$ nu poate fi nici pătrat, nici suma a două pătrate, deci oricare ar fi n , ecuațiile $x^2 + 1 = 4n$ și $x^2 + y^2 + 1 = 4n$ nu au soluții în mulțimea numerelor naturale.*

În anul 1637, Fermat a afirmat că ecuația $x^n + y^n = z^n$, nu are soluții în mulțimea numerelor întregi pentru $n > 2$.

Verificarea conjecturii lui Fermat a constituit și constituie una din cele mai dificile probleme ale matematicii, rezolvată doar recent, în 1995 de către Andrew Wiles.

Din cele prezentate putem trage concluzia că deși matematica antică era pusă în serviciul cerințelor apropiate ale practicii, în cadrul procesului de învățământ (care desigur nu avea caracter public), aceste cerințe au fost deseori depășite în favoarea teoriei. Această tendință este caracteristică generală a cercetării științifice.

Ecuții cu o singură necunoscută

Fie ecuația cu o necunoscută

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0, \quad (1)$$

unde $m \in \mathbf{N}$ și $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbf{Z}$, $a_m \neq 0$.

Ne punem problema rezolvării ecuației în mulțimea numerelor întregi.

Dacă numărul întreg x satisface ecuația (1), atunci x este divizorul numărului întreg a_m . Cum a_m are un număr finit de divizori, toate soluțiile în numere întregi ale ecuației (1) se pot determina printr-un număr finit de înlocuiri succesive în ecuația (1) a divizorilor numărului întreg a_m .

Vom nota D_n – mulțimea divizorilor întregi ai numărului n , $n \in \mathbf{N}$.

1) *Aflați toate soluțiile întregi ale ecuației* $x^{1976} + x^{1973} + x^{1950} - 1 = 0$.

Soluție. $D_1 = \{\pm 1\}$ și, prin înlocuirea lui x cu ± 1 , găsim că -1 este singura soluție în numere întregi a ecuației date.

2) *Găsiți toate soluțiile întregi ale ecuației*

$$16x^{1992} + 6x^{1976} - 4x^{1974} + 23x^{1953} + 4x^{1950} + 1 = 0$$

Soluție. $D_1 = \{\pm 1\}$ și, prin înlocuirea lui x în ecuație cu ± 1 , găsim că -1 este singura soluție în numere întregi a ecuației date.

3) *Să se găsească toate soluțiile întregi ale ecuației*

$$x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 2x - 10 = 0.$$

Soluție. Calculăm $D_{10} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. Toate soluțiile întregi (dacă există!) ale ecuației date sunt elemente ale mulțimii D_{10} . Înlocuind pe rând necunoscuta cu fiecare din elementele mulțimii D_{10} , găsim că -1 ; 1 și 5 satisfac ecuația dată. Deci acestea sunt singurele soluții întregi ale ecuației.

4) *Este posibil ca* $1992^2 - 1992 - 1992 \cdot 1991 + 2$ *să fie soluție a ecuației*

$$x^{1992} - x^{1991} = (2^{1991} - 2^{1992}) \cdot (-1)^n, n \in \mathbf{N}?$$

Soluție. Calculăm

$$1992(1992 - 1 - 1991) + 2 = 1992 \cdot 0 + 2 = 2.$$

Înlocuind pe x cu 2 în ecuație și efectuând calculele obținem

$$2^{1992} - 2^{1991} = (2^{1991} - 2^{1992}) \cdot (-1)^n.$$

a) Pentru $n =$ număr par avem

$$2^{1992} - 2^{1991} = 2^{1991} - 2^{1992} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2^{1992} - 2 \cdot 2^{1991} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{1992} = 0,$$

ceea ce este imposibil. Deci 2 nu este soluție a ecuației.

b) Pentru $n =$ număr impar avem

$$2^{1992} - 2^{1991} = (2^{1991} - 2^{1992}) \cdot (-1) \Leftrightarrow 0 = 0$$

de unde rezultă că 2 este soluție a ecuației.

Este deci posibil ca numărul de forma dată în exercițiu să fie soluție a ecuației pentru n număr impar.

Ecuatii cu două și trei necunoscute

1. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$ax + by = c.$$

Soluție. Fie $d = (a, b)$. Vom arăta mai întâi că ecuația dată are cel puțin o soluție dacă și numai dacă $d \mid c$.

Într-adevăr, presupunem că (x_0, y_0) este o soluție a ecuației date, unde $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$. Deci $ax_0 + by_0 = c$. Cum $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid ax_0 + by_0$ și deci $d \mid c$.

Reciproc, presupunem că $d \mid c$. Există atunci $c_1 \in \mathbf{Z}$ astfel încât $c = d \cdot c_1$.

Cum $d = (a, b)$ atunci există $k, e \in \mathbf{Z}$ astfel încât $ak + be = d$. Deci

$$c = d \cdot c_1 = a(kc_1) + b(ec_1),$$

ceea ce ne arată că $x_0 = kc_1, y_0 = ec_1$ este o soluție în numere întregi a ecuației.

Presupunem în continuare că $d \mid c$. Este evident că făcând în ecuația dată simplificarea cu d putem presupune că $(a, b) = 1$. Fie (x_0, y_0) o soluție particulară a ecuației; atunci $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$, unde $t \in \mathbf{Z}$, constituie mulțimea tuturor soluțiilor ecuației.

Într-adevăr, cum

$$a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = c \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + abt - bat = c \Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c,$$

atunci

$$x = x_0 + bt, y = y_0 - at$$

sunt soluții ale ecuației (2). Invers, presupunem că (x, y) este o soluție a ecuației (2).

Cum

$$ax_0 + by_0 = c \text{ și } ax + by = c$$

atunci

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

și deci

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0)$$

ceea ce implică

$$b \mid a(x - x_0) \text{ și } a \mid b(y - y_0).$$

Cum $(a, b) = 1$ atunci

$$b \mid x - x_0 \text{ și } a \mid y - y_0.$$

Există atunci $t \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x - x_0 = bt$ și deci $x = x_0 + bt$. În acest caz egalitatea

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0)$$

devine

$$y - y_0 = -at \text{ sau } y = y_0 - at.$$

Se observă deci că pentru a determina soluția generală a ecuației (2) este suficient să determinăm o soluție particulară (x_0, y_0) a acestei ecuații.

Ecuatiile de forma $ax + by = c$ sunt numite *diofantice*. Diofant rezolva asemenea ecuații cu coeficienți valori particulare, dar soluția era obținută prin raționamente aritmetice.

2. Arătați că sistemul
$$\begin{cases} x + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = (z + 1)^2 \end{cases} \quad (4)$$

nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Soluție. Scăzând membru cu membru cele două ecuații obținem

$$x(x - 1) = 2z + 1 \quad (5)$$

Cum $x(x-1)$ este număr par (produsul a două numere întregi consecutive), iar $2z+1$ impar, relația (5) este imposibilă. Deci nu există x, y, z întregi astfel încât sistemul (4) să fie verificat.

3. Determinați $x \in \mathbf{N}$ din ecuația $4^x + 3 \cdot 2^x = 88$.

Soluție. Observăm că 0 nu este soluție a ecuației. De aceea, tratăm doar cazul $x \in \mathbf{N}^*$.
Avem

$$4^x + 3 \cdot 2^x = 88 \Leftrightarrow 2^{2x} + 3 \cdot 2^x = 88 \Leftrightarrow 2^x(2^x + 3) = 2^3 \cdot 11 \Leftrightarrow \\ 2^x(2^x + 3) = 2^3(8 + 3) \Leftrightarrow 2^x(2^x + 3) = 2^3(2^3 + 3),$$

de unde se obține $x = 3$.

4. Să se determine $x \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$x^2 - y^2 = (-1)^n \cdot 91,$$

unde $n \in \mathbf{N}$, iar $y \in (-\infty, -3] \cap [-3, +\infty)$.

Soluție. Din $y \in (-\infty, -3] \cap [-3, +\infty)$, deducem că $y = -3$.

a) Pentru n număr par avem

$$x^2 - y^2 = 91.$$

Cum $y = -3$ și $x \in \mathbf{N}$, obținem $x^2 = 100$, deci $x = 10$.

b) Pentru n număr impar avem

$$x^2 - y^2 = -91.$$

Cum $y = -3$ și $x \in \mathbf{N}$, deducem $x^2 = -82$, imposibil.

Deci $x = 10$ este unica soluție a ecuației.

5. Aflați numerele naturale x și y știind că $x^2 + y^2 = z^2$, iar $z = (x; y)$ (unde $(x; y)$ reprezintă c. m. m. d. c. al numerelor x și y).

Soluție. Din $(x; y) = z$, rezultă

$$z \mid x \text{ și } z \mid y.$$

De aceea

$$x = a \cdot z \text{ și } y = b \cdot z,$$

unde $a, b \in \mathbf{N}$. Înlocuind în ecuație, obținem

$$a^2 z^2 + b^2 z^2 = z^2,$$

deci

$$z^2(a^2 + b^2) = z^2,$$

de unde

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Cum $a, b \in \mathbf{N}$ avem:

a) $a = 0$ și $b = 1$

b) $a = 1$ și $b = 0$.

De aceea, soluțiile ecuației date sunt $x = 0$ și $y = z$, sau $x = z$ și $y = 0$.

6. Determinați numerele reale pozitive a, b, c știind că suma pătratelor lor este 4225,

iar fracțiile $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{4}$ și $\frac{c}{12}$ sunt echivalente.

Soluție. Transpunem datele problemei în următorul sistem

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4225$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12}.$$

Ridicând la pătrat fiecare membru al acuțiilor $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12}$ și notând cu m valoarea șirului de rapoarte egale obținut, avem

$$\frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{16} = \frac{c^2}{144} = m,$$

de unde

$$\begin{cases} a^2 = 9m \\ b^2 = 16m \\ c^2 = 144m \end{cases} \quad (6)$$

Înlocuind în prima ecuație a sistemului, obținem

$$9m + 16m + 144m = 4225,$$

de unde

$$m = 25.$$

De aceea, soluția problemei date este

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 20 \\ c = 60 \end{cases}$$

Bibliografie

- [1] Bușneag, D., Maftai, I., *Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor*, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1983.
- [2] Cohl, T., *Vă place matematica? Probleme pentru ciclul gimnazial*, Ed. Moldova, 1991.
- [3] Cojocaru, I., *Lucrare metodică-științifică pentru obținerea gradului I în învățământ*, 1992.
- [4] Cucurezeanu, I., *Probleme de aritmetică și teoria numerelor*, Ed. Tehnică, București 1976.
- [5] Năstăsescu, C., și col., *Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX - XII*, E.D.P., București, 1981.
- [6] xxx, *Colecția Gazeta Matematică*.

STRATEGII EURISTICE FOLOSITE ÎN GEOMETRIA ELEMENTARĂ PENTRU RELAȚIILE DE INEGALITATE ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI

Neculae DINUȚĂ

Universitatea din Pitești

Ion COJOCARU

Școala Generală *Liviu Rebreanu*
Mioveni, Argeș

HEURISTIC STRATEGIES IN GEOMETRY FOR INEQUALITIES IN TRIANGLE

Abstract. In elementary geometry, many consequences can be derived starting from the theorem of articulation. This article presents a series of inequalities in a triangle developed in a context which allows us to discover other cunning and generative ways which are appropriate to heuristic strategies.

Teorema articulației

În cele ce urmează, vom evidenția câteva aplicații ale următoarei teoreme, pe care o vom denumi *Teorema articulației*.

Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ care au $[AB] = [A'B']$ și $[AC] = [A'C']$. Atunci $m(\angle A) > m(\angle A') \Leftrightarrow BC > B'C'$.

Demonstrație

Să presupunem mai întâi că

$$[AB] \equiv [A'B'], [AC] \equiv [A'C'] \text{ și } m(\angle A) > m(\angle A').$$

Construim punctul E astfel încât

$$[AE] \equiv [A'C'] \text{ și } m(\angle BAE) = m(\angle B'A'C')$$

(ca în figura 1).

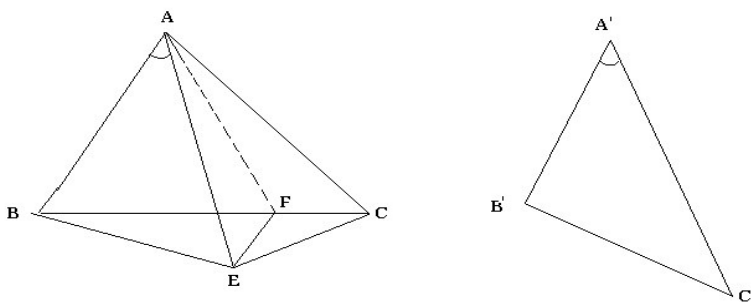


Figura 1

Atunci

$$\Delta ABE \equiv \Delta A'B'C' \text{ (L. U. L.)},$$

deci $[BE] \equiv [B'C']$. Fie $F \in (BC)$ astfel încât

$$\angle(EAF) \equiv \angle(CAF).$$

Dar

$$\Delta AFE \equiv \Delta AFC \text{ (L. U. L.)},$$

de unde rezultă că

$$[FE] \equiv [FC].$$

În ΔBEF ,

$$BE < BF + FE$$

de unde

$$BE < BF + FC$$

Deci

$$BE < BC$$

și deci

$$B'C' < BC.$$

Reciproc, fie

$$[AB] \equiv [A'B'], [AC] \equiv [A'C'] \text{ și } BC > B'C'.$$

Vom folosi metoda reducerii la absurd. Presupunem că $m(\angle A) \leq m(\angle A')$; din demonstrația anterioară, obținem că $[BC] \leq [B'C']$ ceea ce contrazice ipoteza

Consecințe ale teoremei articulației

Consecința 1. *Intr-un paralelogram ABCD avem echivalența*

$$AC > BD \Leftrightarrow m(\angle B) > 90^\circ.$$

Demonstrație. Considerăm ΔABC și ΔADB , în care $AC > BD$. Din teorema articulației rezultă că

$$m(\angle B) > m(\angle A).$$

Însă

$$m(\angle A) + m(\angle B) = 180^\circ,$$

deci

$$m(\angle B) > 90^\circ.$$

Reciproc, dacă

$$m(\angle A) + m(\angle B) = 180^\circ$$

și

$$m(\angle B) > 90^\circ$$

atunci

$$m(\angle A) < 90^\circ.$$

Deci $[AB] \equiv [BA]$, $[AD] \equiv [BC]$, $m(\angle B) > m(\angle A)$ și din teorema articulației rezultă că $AC > BD$.

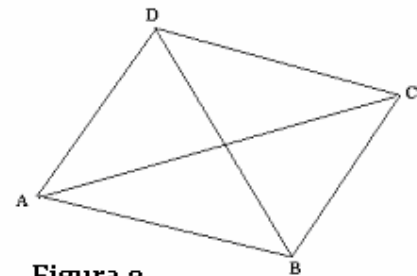


Figura 2

Aplicații

1. *Într-un triunghi, o mediană are lungimea mai mică decât jumătatea lungimii laturii opuse, dacă și numai dacă unghiul ce se opune acestei laturi este obtuz.*

Demonstrație. Fie $M \in (BC)$, $[BM] \equiv [MC]$ și D simetricul punctului A față de M . Patrulaterul $ABDC$, din figura 3, este paralelogram.

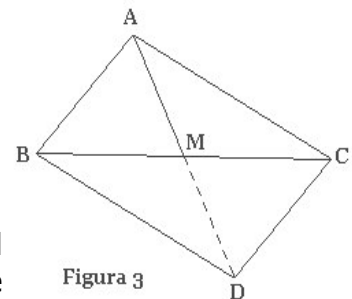


Figura 3

Dacă $AM < \frac{BC}{2}$ atunci

$$2 \cdot AM < BC,$$

de unde

$$AD < BC.$$

Folosind Consecința 1, obținem

$$m(\angle A) > 90^\circ.$$

Reciproc, dacă $m(\angle A) > 90^\circ$, atunci, folosind consecința 1, avem $AD < BC$, de unde

$$AM = \frac{AD}{2} < \frac{BC}{2}.$$

2. Dacă într-un patrulater convex două unghiuri opuse sunt obtuze, lungimea diagonalei formată de cele două vârfuri ale unghiurilor este mai mică decât lungimea celeilalte diagonale.

Demonstrație. În patrulaterul $ABCD$ din figura 4, $m(\angle B) > 90^\circ$, $m(\angle D) > 90^\circ$.

Fie $M \in (AC)$ astfel încât $[AM] \equiv [MC]$.

În $\triangle ABC$, $[BM]$ este mediană, iar $m(\angle B) > 90^\circ$;

folosind consecința 1 rezultă că $BM < \frac{AC}{2}$.

Analog, rezultă că $DM < \frac{AC}{2}$.

Atunci în $\triangle BMD$, $BD < BM + DM$, de unde

$$BD < \frac{AC}{2} + \frac{AC}{2} = AC.$$

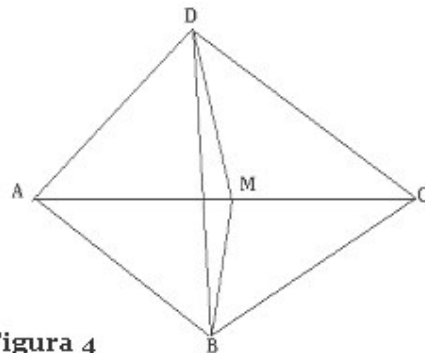


Figura 4

Observație. Relația de inegalitate este mult mai ușor vizualizată cu ajutorul paralelogramului în care teorema articulației devine evidentă.

Consecința 2. În triunghiul ABC , $[BM]$ și $[CN]$ sunt medianele corespunzătoare laturilor $[AC]$ și respectiv $[AB]$. Atunci

$$AB < AC \text{ dacă și numai dacă } BM < CN.$$

Demonstrație.

Dacă $BM \cap CN = \{G\}$, atunci $BG = \frac{2}{3}BM$, $CG = \frac{2}{3}CN$

și $[AP]$ este mediană, unde $\{P\} = AG \cap BC$ (figura 5).

În $\triangle APB$ și $\triangle APC$, $[AP] \equiv [AP]$, $[PB] \equiv [PC]$ și $AC > AB$. Folosind teorema articulației rezultă că $m(\angle APC) > m(\angle APB)$, de unde $m(\angle GPC) > m(\angle GPB)$. De aceea, $GC > GB$ și $CN > BM$.

Reciproc, dacă $CN > BM$, atunci $CG > BG$, de unde $m(\angle GPC) > m(\angle GPB)$, ceea ce este echivalent cu $m(\angle APC) > m(\angle APB)$. De unde $AC > AB$.

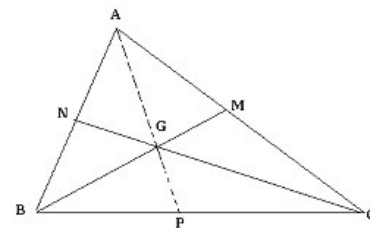


Figura 5

Aplicație. *Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă are două mediane congruente.*

Consecința 3. *În triunghiul ABC , $[BD]$ și $[CE]$ sunt înălțimile corespunzătoare laturilor (AC) și (AB) , $D \in (AC)$, $E \in (AB)$. Atunci $AC > AB$ dacă și numai dacă $CE > BD$.*

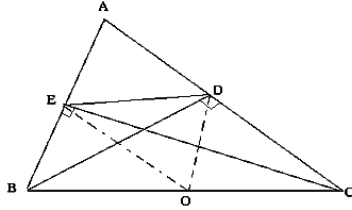


Figura 6

Demonstrație. Vom demonstra pentru cazul în care $\triangle ABC$ este ascuțitunghic, ca în figura 6.

Din $m(\angle BDC) = m(\angle CEB) = 90^\circ$, rezultă că $BCDE$ este patrulater inscriptibil, înscris în cercul de diametru $[BC]$ și centru O .

În triunghiurile isoscele BOD și COE , avem

$$BO = DO = EO = CO = R,$$

unde R este raza cercului circumscris patrulaterului $BCDE$. Aplicând teorema articulației, obținem

$$m(\angle BOD) = 2m(\angle OCD) \text{ și } m(\angle COE) = 2m(\angle OBE).$$

Dacă $AC > AB$, atunci $m(\angle ABC) > m(\angle ACB)$, deci $m(\angle COE) > m(\angle BOD)$ și atunci $CE > BD$.

Reciproc, dacă $CE > BD$, atunci $m(\angle COE) > m(\angle BOD)$, de unde

$$m(\angle OBA) > m(\angle OCD)$$

și atunci, dacă $m(\angle ABC) > m(\angle ACB)$ rezultă că $AC > AB$.

Aplicație. *Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă are două înălțimi congruente.*

Teorema articulației și consecințele ei pot conduce la integrarea elementelor unui triunghi în diverse figuri geometrice plane. Folosirea acestor strategii euristice poate duce la învățare prin descoperire și poate permite adaptarea unor conținuturi de geometrie la nivelul posibilității de înțelegere a elevului.

Bibliografie

- [1] Cârjan, F., *Strategii euristice în didactica matematicii*, Ed. Paralela 45, 1999.
- [2] Hadamard, J., *Lecții de geometrie elementară*, Ed. Tehnică, București 1981.
- [3] Lalescu, T., *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, București 1958.
- [4] Rusu, E., *Cum gândim și rezolvăm 200 de probleme*, Ed. Albatros, București, 1972.

ROLUL PROBLEMELOR ÎN PREDAREA – ÎNVĂȚAREA MATEMATICII

Anișoara GHERGHE

Școala Generală *George Topârceanu*
Mioveni, Argeș

THE ROLE OF PROBLEMS IN TEACHING AND LEARNING MATHEMATICS

ABSTRACT. In problem solving situations it is important to identify what is known and what is unknown. The paper proposes a modality to emphasize the way to discover the solution by making a clear distinction between the two. A few examples are provided for a strategy to make explicit judgement in problem solving. This analysis leads to a clasification of problems that can be used in selecting adequate school problems.

Lucrarea de față prezintă rolul pe care îl au problemele în predare. Adăugând problemelor și o cale de rezolvare, le putem structura în mai multe forme, ce vor fi prezentate în lucrare. Discutăm mai întâi termenul de *problemă* pentru a circumscrie conținutul său și a ne ocupa de metodele de rezolvare a problemelor și metodica abordării lor în clasă.

În general prin *problemă* se înțelege o dificultate ce trebuie depășită, o piedică ce trebuie înlăturată și aceasta nu se poate face prin folosirea unor mijloace cunoscute. Ceea ce este dificil într-o *problemă* pentru cineva, poate fi simplu pentru altcineva, în funcție de pregătirea și experiența anterioară a persoanelor în discuție.

G. Polya [2] definește noțiunea de *problemă* operațional. Pentru Polya, „a avea (sau a-ți pune) o *problemă* înseamnă a construi conștient o acțiune adecvată pentru a atinge un scop clar conceput, dar nu imediat accesibil. A rezolva o *problemă* înseamnă a găsi o asemenea acțiune care în general conține un element de noutate, fie în organizarea cunoștințelor, fie în metode”[1].

Prezentăm în lucrare câteva interdependențe între datele și necunoscute unei probleme, preluate din [4].

În structura oricărei probleme intervin trei elemente: datele și necunoscuta, interdependența dintre ele și întrebarea, care solicită cel mai adesea găsirea unor noi interdependențe între date și necunoscute. Adăugând unei probleme și o cale de rezolvare o putem structura în forma $I \Rightarrow C$, unde prin **I** am notat ipoteza (datele problemei, dar și toate adevărurile stabilite anterior), prin **C** s-a notat concluzia și prin „ \Rightarrow ” s-a notat procedeul, metoda de demonstrație prin care răspundem la întrebarea problemei.

Cele trei elemente, în raport cu categoriile „cunoscut” și „necunoscut”, pot fi în mai multe situații.

1) $I, C \Rightarrow$ cunoscute : acesta este un exercițiu de verificare.

Exemplu. Să se verifice că

$$\sqrt[5]{843 + 589 \cdot \sqrt{2}} + \sqrt[5]{843 - 589 \cdot \sqrt{2}} = 6.$$

Calculul direct este imposibil. Să profităm de faptul că cele două expresii de sub radical sunt conjugate. Facem produsul lor și obținem $16807 = 7^5$. Notând cu x și y cei doi radicali se află $xy = 7$. Cum să arătăm că $x + y = 6$?

Să căutăm noi două numere x și y , astfel ca $x + y = 6$ și $xy = 7$. Rezultă

$$x = 3 + \sqrt{2}, y = 3 - \sqrt{2}.$$

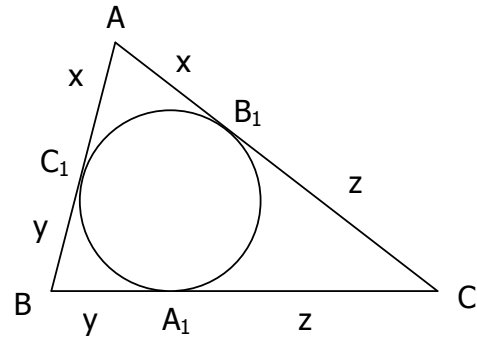
Calculăm x^5 și obținem $843 + 589 \cdot \sqrt{2}$. Deci $\sqrt[5]{843 + 589 \cdot \sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$ (iar al doilea radical este $3 - \sqrt{2}$). Deci $x + y = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$.

2) I, \Rightarrow necunoscute și C necunoscut – problemă-exercițiu de aplicare a unei metode (rezolvarea unui sistem de ecuații).

Exemplu. Aflați distanțele de la vârfurile unui triunghi ABC , la punctele de contact cu cercul înscris.

Soluție. Baza demonstrației o constituie faptul că tangentele dintr-un punct la cerc sunt de lungimi egale.

$$\begin{cases} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{cases}$$



Prin adunare găsim: $x + y + z = p$ și prin scădere: $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

3) I, C cunoscute dar „ \Rightarrow ” necunoscut – problemă în care dificultatea este de a găsi calea, acțiunea (procedee necunoscut).

Exemplu. Să se determine m astfel ca

$$f(x) = \sqrt{\cos^4 x + m \cdot \sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + m \cdot \cos^2 x}$$

să nu depindă de x .

Soluție. Să punem condiția $f(x) = 0$? Ar fi complicat. Să dăm lui x două valori pentru care putem calcula pe $\sin^2 x$ și $\cos^2 x$ și care să nu difere prin $2k\pi$. Să punem condiția ca să obținem valori egale pentru $f(x)$.

$$f(0) = 1 + \sqrt{m}; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}}.$$

Este necesar ca $1 + \sqrt{m} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}}$, de unde $m = 0$ sau $m = 4$.

Dacă $f = \text{constant}$, atunci $m = 0$ sau $m = 4$. Rămâne să verificăm dacă, într-adevăr, pentru aceste valori, $f = \text{constant}$.

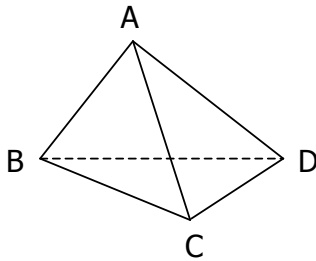
$$1) m = 0, f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$2) m = 4, f(x) = \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} + \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} = 2 - \cos^2 x + 2 - \sin^2 x = 3.$$

4) I cunoscută, iar \Rightarrow , C necunoscute – probleme deschise (ce pot deduce din I?)

Exemplu. Fețele unui tetraedru sunt triunghiuri congruente. Ce rezultă?

Soluție. $\triangle ABC \equiv \triangle DBC$, BC latură comună, BD este congruent sau 1) cu AB sau 2) cu AC .



- 1) Dacă $[DB] \equiv [AB]$, $[DC] \equiv [AC]$, rezultă că $\triangle ACD$ este isoscel cu vârful în C , iar $\triangle ABD$ isoscel cu vârful în B ; în acest caz tetraedrul se poate construi luând două triunghiuri isoscele $\triangle ABD$ și $\triangle ACD$ suprapuse și rotind unul din ele în jurul lui AD până ce $[BC]$ devine congruent cu $[AD]$.
- 2) Dacă $[DB] \neq [AB]$, presupunând că o față nu este triunghi isoscel, rezultă $[DB] \equiv [AC]$. Analog, obținem $[DC] \equiv [AB]$ și $[BC] \equiv [AD]$. În ambele cazuri, fiecare pereche de muchii opuse este formată din segmente congruente.

Observație. Se poate arăta că dacă fețele sunt congruente, ele sunt triunghiuri ascuțitunghice.

5) \Rightarrow , C cunoscute și I necunoscută - probleme rar întâlnite în școală (de tipul: din ce poate proveni concluzia?).

Exemplu. Ce identitate stă ca idee pentru simplificarea fracției:

$$F = \frac{a^3(b-c)^3 + b^3(c-a)^3 + c^3(a-b)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3} ?$$

Soluție. Considerăm identitatea:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) + 3xyz.$$

Dacă $x + y + z = 0$, atunci $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Dacă în fracție punem la numărător $x = a(b-c)$; $y = b(c-a)$; $z = c(a-b)$, iar pentru numitor

$x = a-b$; $y = b-c$; $z = c-a$ și ținem seama că $x + y + z = 0$ obținem

$$F = \frac{3a(b-c) \cdot b(c-a) \cdot c(a-b)}{3(a-b)(b-c)(c-a)} = abc.$$

Este aceeași identitate susceptibilă să ne furnizeze probleme noi?

Iată un exemplu! Să se rezolve ecuația

$$(x-3b+a)^3 + (4x-5b+2a)^3 = (5x-b-4a)^3.$$

Soluție. Prin notația $u = x-3b+a$, $v = 4x-5b+2a$, $t = -5x+b+4a$, avem $u+v+t = 0$ și ecuația se scrie sub forma echivalentă

$$3(x-3b+a)(4x-5b+2a)(-5x+b+4a) = 0.$$

6) C cunoscută; I, și \Rightarrow necunoscute – probleme în care se știe rezultatul și se întreabă din ce ar putea proveni și pe ce cale. Sunt probleme de descoperire.

Exemplu. Se știe că $R \geq 2r$ (R , r sunt razele cercului circumscris, respectiv înscris unui triunghi). Găsiți o ipoteză și un procedeu pentru demonstrarea acestei inegalități.

Soluție. Considerăm cunoscută inegalitatea următoare.

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci avem

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Cum poate fi folosită această inegalitate pentru a demonstra inegalitatea $R \geq 2r$?

Notăm : $b+c-a = x, c+a-b = y, a+b-c = z.$ (1)

Numerele x, y, z sunt pozitive deoarece orice latură a unui triunghi este mai mică decât suma celorlalte două. Cuplând relațiile (1) două câte două obținem:

$$a = \frac{y+z}{2}; \quad b = \frac{x+z}{2}; \quad c = \frac{x+y}{2}$$

și inegalitatea dintre laturi devine

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right] \geq \frac{1}{2} (2+2+2) = 3.$$

Sunt cunoscute relațiile

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Din relațiile (1) rezultă

$$p-a = \frac{x}{2}; \quad p-b = \frac{y}{2}; \quad p-c = \frac{z}{2}.$$

Obținem

$$\begin{aligned} \frac{R}{2r} &= \frac{abc p}{8S^2} = \frac{abc p}{8p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)} = \\ &= \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \right) \right] \geq \frac{1}{4} (1+3) = 1. \end{aligned}$$

Deci $\frac{R}{2r} \geq 1$ sau $R \geq 2r$.

7) \Rightarrow cunoscut, I și C - necunoscute – probleme de creativitate; se folosește un procedeu și prin alegerea unei ipoteze convenabile se găsește o concluzie interesantă.

Exemplu.

Procedeu: Folosirea unor formule trigonometrice și identități într-un triunghi.

Ipoteza: $xy + yz + zx = 1$

Concluzia: $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$

Soluție. Având în vedere condițiile ce se impun și utilizând identitatea

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C; \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1,$$

cu notațiile

$$x = \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

se poate obține identitatea condiționată cerută.

$$\left(\text{Se va folosi } \operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \cdot \right)$$

8) I, \Rightarrow , C – necunoscute - probleme de invenție. Subiectul (elevul sau profesorul) alege singur ipotezele, calea de rezolvare, concluzia, construiește singur o problemă.

Exemplu. Arătați că puterea a treia a oricărui număr întreg este diferența a două pătrate de numere întregi, dintre care unul este multiplu de 9. Puteți deduce de aici cu ce este egală suma

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 ?$$

Soluție. Folosim identitatea

$$n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2$$

și faptul că unul din numere $n-1$, n , $n+1$ este divizibil cu 3. Sau

$$n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 - [0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)]^2$$

$$1^3 = 1^2 - 0^2$$

$$2^3 = (1 + 2)^2 - 1^2$$

$$3^3 = (1 + 2 + 3)^2 - (1 + 2)^2$$

$$4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 - (1 + 2 + 3)^2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\underline{n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 - [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]^2}$$

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Aceste situații conduc la o clasificare a problemelor, clasificare de mare valoare didactică, pentru că ne poate ghida în selectarea problemelor de uz școlar, în abordarea lor după dificultate, după cantitatea euristică pe care o incumbă.

Bibliografie

- [1] Ionescu, M., *Strategii de predare-învățare în concordanță cu scopurile didactice*. Sinteze pe teme de didactică modernă – Tribuna școlii – supliment 1980.
- [2] Polya, G., *Descoperirea în matematică*, EDP, București, 1971.
- [3] Radu, I. T., *Sinteze pe teme de didactică modernă*, Tribuna școlii, 1986.
- [4] Săvulescu, D., Simion, S., *Metodica predării matematicii*, Paralela 45, Pitești, 1998.

O METODĂ SIMPLĂ DE OBȚINERE A DREPTEI SAU PARABOLEI DE REGRESIE

Monica-Gabriela GRUIA , Gherghina NICOLESCU
Școala Generală *Liviu Rebreanu*,
Mioveni, Arges

A SIMPLE METHOD TO OBTAIN A STRAIGHT LINE OR A REGRESSION PARABOLA

Abstract. In many laboratory activities the task is to find some physical constants. These constants can be established by considering the incline of the straight line representing the relation between two parameters of the body (x and $y=f(x)$) and the crossing points of the straight line with the axes of coordinates or from the values of the second degree polynomial, which represents this dependence. The straight line or the parabola (obtained directly or through an approximation) are called a regression straight line, respectively a regression parabola. The problem is to find out the equation of the regression straight line $y=ax+b$ or of the regression parabola $y=ax^2+bx+c$. The best method of finding out the values of the regression polynomial is the method of the smallest squares, invented by Gauss. This method is laborious enough and it can't be well explained to students who do not know the differentials. This is the reason for presenting in this paper a method which has the advantage of being more intelligible for students. The error introduced in this method – as compared to the method of the smallest squares – is under the level of errors introduced by the tools and the measurement apparatus or devices existing in a school lab. The regression straight line and the regression parabola are often used to estimate the value of y for a given x (that is finding out the most possible value of y corresponding to a certain x), or vice-versa, estimating the value of x for a given y .

1. Determinarea gradului polinomului de regresie

Să presupunem că dispunem de date experimentale ce reprezintă relația dintre doi parametri, reprezentate prin puncte într-un reper cartezian. O dreaptă sau o parabolă care trece „cât mai aproape” de aceste puncte se numesc *dreaptă de regresie* sau *parabolă de regresie*, iar ecuația acestora se numește *formulă de regresie*.

În general, formula de regresie este exprimabilă printr-un polinom, dar gradul acestuia poate să fie necunoscut. În acest caz, gradul polinomului trebuie determinat (de regulă, cea mai mică valoare posibilă), o operație care se poate face în felul următor: pentru mai multe valori ale lui x , se măsoară $y=f(x)$ și se marchează într-un grafic punctele (x_i, y_i) , apoi se unesc prin segmente de dreaptă, în ordinea creșterii sau descreșterii lui x și se numără câte urcări sau coborâri sunt sugerate, nu arătate de linia frântă obținută. Numărul total de urcări și coborâri sugerate este chiar gradul polinomului de regresie necesar. Astfel:

- dacă linia frântă nu are tendința generală nici de urcare, nici de coborâre, curba de regresie este un polinom de gradul 0 (o constantă);
- dacă linia frântă sugerează numai o urcare sau numai o coborâre (ca în semnele grafice \backslash și $/$), polinomul de regresie este de gradul I (o dreaptă de regresie);

- dacă linia frântă urcă numai o dată și apoi coboară tot o singură dată (ca în literele Λ , respectiv V), polinomul de regresie este de gradul II (o parabolă de regresie);
- dacă linia frântă sugerează litera N sau inversul literei N , polinomul de regresie este de gradul III.
- dacă linia frântă sugerează litera M sau litera W , polinomul de regresie este de gradul IV.

Cazurile cele mai frecvente nu trec de gradul II, din acest motiv și această lucrare nu trece peste gradul II al polinomului de regresie.

2. Determinarea ecuației drepte de regresie prin metoda simplificată

Prezentăm în continuare o metodă de determinare a drepte de regresie care presupune calcule mai simple decât alte metode. O vom numi *metoda simplificată*.

Se presupune la început că mai multe puncte experimentale $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ se găsesc pe dreapta de ecuație $y = a x + b$. Atunci fiecare pereche de valori (x_i, y_i) verifică ecuația drepte, adică

$$\begin{aligned} y_1 &= a x_1 + b \\ y_2 &= a x_2 + b \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= a x_n + b. \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru și împărțind totul cu n se obține

$$\langle y \rangle = a \langle x \rangle + b,$$

unde $\langle x \rangle$ și $\langle y \rangle$ sunt valorile medii ale parametrilor. Deci și centrul de greutate $C(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ al mulțimii punctelor experimentale se găsește pe dreapta dată. Dar cum un singur punct nu poate determina fără echivoc ecuația drepte de regresie, se poate judeca în felul următor: centrele de greutate $C_1(\langle x_1 \rangle, \langle y_1 \rangle)$ și $C_2(\langle x_2 \rangle, \langle y_2 \rangle)$ ale jumătăților „inferioară” și „superioară” ale punctelor experimentale se găsesc pe această dreaptă. Deci este suficient să fie cunoscute centrele de greutate ale celor două jumătăți ale punctelor experimentale și dreapta de regresie este cunoscută deoarece trece exact prin aceste două centre de greutate.

Deși în practică punctele experimentale nu se așează pe o aceeași dreaptă, metoda expusă aici poate fi în continuare utilizată.

Pentru obținerea drepte de regresie pentru un set de puncte experimentale se poate proceda deci în felul următor

- se ordonează punctele experimentale după x ;
- se împart acestea în două grupe egale (sau aproximativ egale);
- se calculează coordonatele centrelor de greutate ale celor două grupe, C_1 și C_2 ;
- eventual se trasează pe grafic dreapta de regresie $y = a x + b$ care trece prin C_1 și C_2 ;
- panta drepte de regresie este $a = (\langle y_2 \rangle - \langle y_1 \rangle) / (\langle x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle)$;
- termenul liber $b = (\langle y_1 \rangle \langle x_2 \rangle - \langle y_2 \rangle \langle x_1 \rangle) / (\langle x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle)$.

Exemplu. Se dau următoarele 8 valori experimentale, pe care le împărțim în grupe de câte 4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2	3	5	4	7	6	7	10
y_{cs}	2	3	4	5	6	7	8	9
y_{cm}	2,083	3,060	4,036	5,012	5,988	6,694	7,940	8,917

$$\langle x_1 \rangle = 2,5$$

$$\langle x_2 \rangle = 6,5$$

$$\langle y_1 \rangle = 3,5$$

$$\langle y_2 \rangle = 7,5$$

Deci dreapta de regresie trece prin punctele $C_1(2,5; 3,5)$ și $C_2(6,5; 7,5)$ și are $a=1$ și $b=1$. Rezultă ecuația dreptei de regresie $y = x + 1$.

Observație. Cu metoda celor mai mici pătrate s-ar fi obținut $a = 0,976$ și $b = 1,107$. În tabel y_{cs} reprezintă valorile lui y calculate cu ecuația dreptei obținută prin metoda simplificată, iar y_{cm} care reprezintă valorile lui y calculate cu metoda celor mai mici pătrate. Se remarcă faptul că valorile calculate cu cele două metode nu diferă prea mult între ele.

3. Determinarea ecuației parabolei de regresie prin metoda simplificată

La fel ca mai sus, presupunem mai întâi că punctele $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ se găsesc pe o parabolă de ecuație $y = ax^2 + bx + c$; vom avea deci

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

.....

$$y_n = ax_n^2 + bx_n + c.$$

Adunând membru cu membru și împărțind totul cu n , se obține

$$\langle y \rangle = a \langle x^2 \rangle + b \langle x \rangle + c,$$

unde $\langle x \rangle$ și $\langle y \rangle$ sunt mediile aritmetice ale lui x , respectiv y , iar $\langle x^2 \rangle$ este media lui x^2 . Se poate spune că $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ și $\langle x^2 \rangle$ luate pentru treimea *inferioară*, *medie* și *superioară* verifică ecuația dată mai sus. Apoi, deși valorile experimentale ale lui x și y nu se aștern exact pe parabola de regresie $y = ax^2 + bx + c$, impunem condiția ca valorile medii pentru cele trei grupe să verifice ecuația parabolei de regresie. Astfel se obține un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, din care se obțin soluțiile a, b, c .

Practic se poate proceda deci în felul următor:

- se ordonează valorile experimentale (x_i, y_i) astfel încât valorile lui x să formeze un șir monoton;
- se împarte acest șir în trei grupe aproximativ egale;
- pentru fiecare grupă se calculează $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ și $\langle x^2 \rangle$;
- se alcătuieste un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute (a, b, c);
- se rezolvă sistemul și se scrie ecuația parabolei de regresie.

Exemplu. Se dau următoarele 6 puncte experimentale, care se împart în trei grupe.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	6	4	4	2
x^2	1	4	9	16	25	36
y_{cs}	0,625	3,375	4,875	5,125	4,125	1,875
y_{cm}	1,000	3,437	4,771	4,983	3,971	1,871

$$\begin{array}{lll} \langle x_1 \rangle = 1,5 & \langle x_2 \rangle = 3,5 & \langle x_3 \rangle = 5,5 \\ \langle y_1 \rangle = 2 & \langle y_2 \rangle = 5 & \langle y_3 \rangle = 3 \\ \langle x_1^2 \rangle = 2,5 & \langle x_2^2 \rangle = 12,5 & \langle x_3^2 \rangle = 30,5 \end{array}$$

Se obține deci

$$\begin{array}{l} 2,5a + 1,5b + c = 2 \\ 12,5a + 3,5b + c = 5 \\ 30,5a + 5,5b + c = 3 \end{array}$$

Soluțiile sistemului sunt: $a = -5/8 = -0,625$, $b = 37/8 = 4,625$ și $c = -27/8 = -3,375$, deci parabola de regresie are ecuația

$$y = (-5x^2 + 37x - 27)/8.$$

Observații.

1. Graficul parabolei de regresie nu mai trece exact prin centrele de greutate ale grupelor de puncte, dar trece foarte aproape de acestea, din cauza inegalității mediilor (media pătratică este mai mare sau cel puțin egală cu media aritmetică).
2. Metoda celor mai mici pătrate ar fi dat (după calcule laborioase) $a = -4/7 = -0,571$, $b = 146/35 = 4,171$ și $c = -13/5 = -2,6$. În tabel, y_{cs} și y_{cm} reprezintă valorile lui y date de parabolele de regresie obținute prin metoda simplificată, respectiv prin metoda celor mai mici pătrate, pentru aceleași valori ale lui x ; se observă și de această dată că valorile calculate nu diferă foarte mult de la o metodă la alta.
3. Dreapta de regresie și parabola de regresie se folosesc deseori pentru estimarea valorii lui y pentru o valoare x dată (adică aflarea valorii celei mai probabile a lui y corespunzătoare unui anumit x), sau invers, estimarea valorii lui x pentru un y dat.

Bibliografie

- [1] Girard, G., Thierce, C., *Alef/Geometrie*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [2] Grigoriu, O., *Coordonate ale predării-învățării din perspectiva didacticii moderne*, București, 1976.
- [3] Sfichi, R., *Învățământul fizicii în contextul interdisciplinar*, Ed. Evrica, Brăila, 1994.

O NOUĂ CONCEPȚIE DESPRE GEOMETRIE

Valerian OPRÎȘOR

Școala Generală *Liviu Rebreanu*
Mioveni, Argeș

A FRESH LOOK TO GEOMETRY

„One of geometry research methods is to choose, from the immensity of its figures, those which are connected by a certain dominant feature. They are less and being connected they can be studied easier and can lead to some new specific features.”

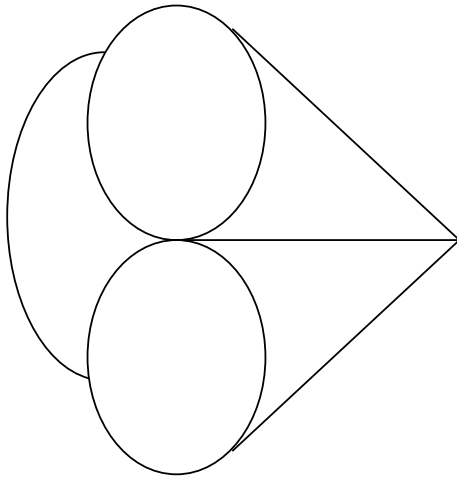
Alexandru Myller

Abstract. Beginning with the second half of the last century, the screen of the cinemas and TVs have accustomed us to the underwater landscape and now everybody is watching with delight the gentle movements which change continuously the forms of plants and animals which live in this environment. Could we invent a geometry for the underwater flora and fauna? A geometry of the sea lilies which is indifferent to the deformation of the geometrical figures? Yes! It was created in the XIX-th century and was called *Topology*. The term comes from “*topos*” which means “place” in Greek and “*logos*”. In comparison with the usual geometry, where we consider that all the figures are rigid and by movement they don't change their shape dimensions, such a geometry seems fantastic! In *Euclidian geometry*, a rectangular triangle, for example, moved on its plane or transported by a translation and rotation movement wherever in space, it remains the same rectangular triangle and the same thing happens with any geometrical figure; that's why we can say that the Euclidian geometry is *metric* or *quantitative*. But, in topology, when a figure moves, its shape and dimensions change like the waves on the surface of the sea; the rectangular triangle moved from its places may have changed into a rhombs, a hexagon, a circle or any other closed figure with a bizarre outline, a sphere like a plasticine, or it may be modeled in a cube, a pyramid, a cone or a cylinder, a seal or a crocodile. The topology doesn't take into account the quantitative or metric properties of a figure, but only those *qualitative, non-quantitative* and *non-metric*. The topology studies the networks (curves which intersect) and the properties of the crossing points or those which keep their relative positions towards other points, for example, the position of the contact points of two curves or between two surfaces. We can place here the problems concerning the roads (curves which connect two points), the labyrinth or the maps and their coloring. The first book “*The introduction in the Topology*” was published, appealed by *C. Fr. Gauss*, by *F. B. Listing*, a professor and astronomer from Göttingen. He introduced this new name, and not only Gauss, but also the other mathematicians who study these problems, considered them belonging to the *Geometry situs* (geometry of position) or to the *Analysis situs*. The last term was used even after the introduction of the name *topology*. Although, topology, as a new branch of mathematics appeared in the second half of XIX-th century, a more careful research of the problems in the past, discovers some traces of the ideas which seem to be new. So, *Descartes* established, in 1640, one of the formula considered to be later fundamental in topology, and *Leibniz* wrote to *Chr. Huygens* (1629-1695): “I thing we need another analysis, a geometrical one, to show directly *situm* (position) in the same way the algebra shows *magnitudinem* (size)”.

Din a doua jumătate a trecutului secol, ecranele cinematografelor și ale televizoarelor ne-au obișnuit cu peisajul subacvatic și acum fiecare privește cu desfătare mișcările pline de grație prin care se schimbă, în mod continuu, formele plantelor și animalelor ce trăiesc în acest mediu. S-ar putea oare inventa o geometrie corespunzătoare florei și faunei submarine? O geometrie a crinilor de mare, indiferentă la deformările figurilor geometrice? Da! ea a fost creată în secolul al XIX-lea și a fost numită *Topologie*. Termenul, compus din *topos*, care înseamnă în grecește *loc* sau *poziție* și *logos*, arată că domeniul topologiei cuprinde proprietățile figurilor geometrice care nu se schimbă atunci când ele se deformează în mod continuu, fără să fie rupte, îndoite și lipite din nou. Față de geometria obișnuită, unde se consideră că toate corpurile sunt rigide și prin mișcare ele nu-și schimbă forma și dimensiunile, o asemenea geometrie pare fantastică! În *geometria euclidiană* un triunghi dreptunghic, de pildă, deplasat în cadrul planului său ori transportat printr-o mișcare de translație și rotație oriunde în spațiu, rămâne tot același triunghi dreptunghic și, la fel se întâmplă cu orice figură sau corp geometric, de aceea se spune că geometria euclidiană este *metrică* sau *cantitativă*. În topologie, însă, când o figură se mișcă, forma și dimensiunile ei se schimbă ca și valurile pe suprafața mării; triunghiul dreptunghic odată mutat de la locul lui s-ar putea transforma într-un romb, un hexagon, un cerc sau în cine știe ce altă figură închisă cu un contur oricât de bizar, o sferă, aidoma uneia de plastilină, poate fi modelată într-un cub, o piramidă, un con sau cilindru, o focă ori un crocodil. Topologia nu ține seamă de proprietățile cantitative sau metrice ale unei figuri, ci numai de acelea *calitative*, *nequantitative* și *nemetrice*. Topologia cercetează proprietățile figurilor ce se păstrează atunci când figura se deformează, anume acelea legate de *elementele de ordine ale punctelor*, de *numărul nodurilor unei curbe* (adică de punctele de intersecție dintre două sau mai multe ramuri ale ei), topologia studiază *rețelele* (mulțimi de curbe ce se intersectează) și proprietățile punctelor de intersecție sau care păstrează pozițiile lor relative față de ale altora, de pildă, ale punctelor de contact dintre două curbe sau dintre două suprafețe. Aici își găsesc locul problemele legate de drumuri (curbe care leagă două puncte între ele), labirint sau hărți și colorarea lor. Prima carte *Introducere în Topologie* a fost publicată, la îndemnul lui C. Fr. Gauss, de către *F. B. Listing* (1808 – 1882), profesor și astronom din Göttingen. El a introdus și acest nume nou, căci atât Gauss cât și ceilalți matematicieni, care s-au ocupat de asemenea probleme, le-au considerat că aparțin de *Geometria situs* (geometrie de poziție) sau de *Analysis situs*. Ultimul termen a circulat încă și după introducerea numelui *topologie*. Căci, deși topologia, ca o nouă ramură a matematicilor datează din a doua jumătate a secolului al XIX-lea, ca și în orice domeniu nou creat, o mai atentă cercetare a problemelor din trecut descoperă în ele urme bine conturate ale ideilor ce păreau să fie noi. Astfel *Descartes* a stabilit, în 1640, una dintre formulele considerată mai târziu fundamentală în topologie, iar Leibniz, îi scria, în 1679, lui *Chr. Huygens* (1629 - 1695): „Cred că ne trebuie încă și o altă analiză, una geometrică, care să exprime direct *situm* (poziția), așa după cum algebra exprimă *magnitudinem* (mărima)”. Leibniz s-a gândit la această problemă, dar nu a publicat nimic despre modul cum ar trebui tratată. Abia peste vreo jumătate de veac au apărut primele teoreme din acest domeniu într-o lucrare a lui *Leonhard Euler*, intitulată *Soluția unei probleme ce aparține geometriei de poezie*, prezentată în 1736 Academiei din Petersburg (azi Leningrad). Articolul a fost citit cu deosebită plăcere nu numai de matematicieni, dar și de toți care se distrau rezolvând probleme matematice, fiindcă în el se găsea soluția unei probleme considerată până atunci imposibilă, cunoscută astăzi sub numele de *Problema celor șapte poduri din Königsberg* (Kaliningrad). Aceste șapte poduri, fuseseră construite la începutul secolului al XVIII-lea, peste râul Pregel, care

trecea prin oraș, înconjurând o insulă, numită Kneiphof, dând astfel posibilități multiple de a se ajunge la insulă. Pe cinci dintre ele se ajungea direct la insulă pe când celelalte două poduri traversau doar câte un braț al râului. Locuitorii orașului se distrau încercând să străbată cele 7 poduri numai câte o singură dată și apoi să se întoarcă la locul de unde au plecat, dar nu reușeau. Nereușita a transformat distracția în obsesie, dar curând s-a constatat că nici matematicienii nu au putut da vreo explicație plauzibilă acestui fapt. În aceste condiții întrebarea a ajuns la Euler, care se afla pe atunci în Petersburg.

El a stabilit că problema, așa cum se prezenta ea, era imposibilă și apoi a arătat care sunt criteriile după care se poate decide, în general, dacă o asemenea problemă este sau nu posibilă. Soluția problemei, a observat Euler, nu depinde nici de *lungimea* podurilor, nici de *forma* lor, nici de *distanța*, dintre ele, nici de *mărimea* insulei, ci numai de *poziția*, adică de *situația*, acestor poduri unul față de celălalt. Ținând seama de aceste observații, Euler a reprezentat drumul peste cele 7 poduri prin schița următoare, în care insula a fost redusă la un punct.

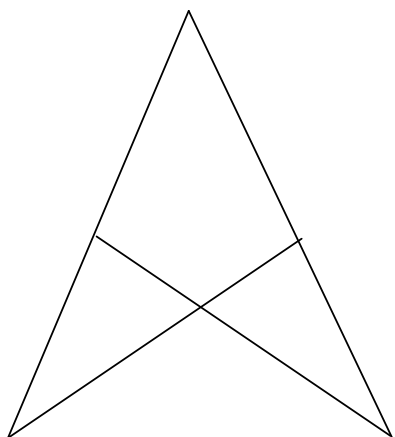
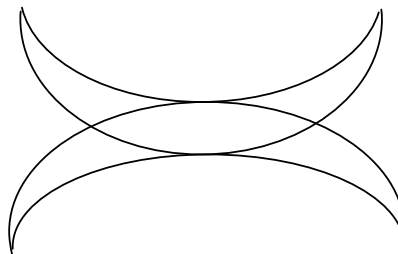
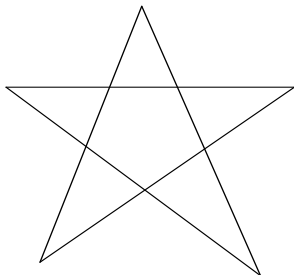


În topologie, o astfel de figură având forma unei curbe închise, străbătută de mai multe linii interioare care nu au nicio extremitate liberă, se numește *un drum* sau *o rețea închisă*. Punctul de întâlnire dintre mai multe drumuri sau linii se numește *nod*, ordinul lui fiind acela al numărului liniilor care trec prin el. În legătură cu rețelele închise, se demonstrează următoarele teoreme:

1. Orice rețea închisă are *un număr pereche* de noduri impare.
2. O rețea fără noduri impare este închisă.
3. Orice rețea închisă care are mai mult de două noduri impare nu poate fi descrisă complet, printr-o singură trăsătură continuă.

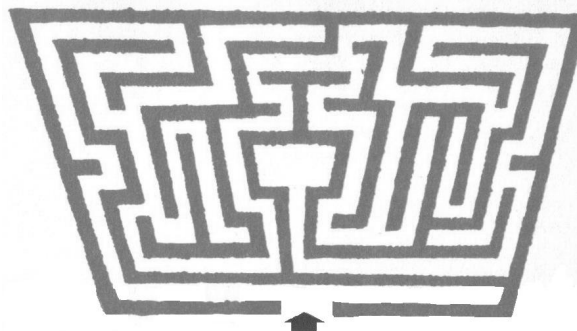
Ultima dintre aceste teoreme dă și dezlegarea problemei celor 7 poduri căci, privind rețeaua lui Euler, se constată că ea cuprinde 4 noduri impare, dintre care 3 sunt de ordinul 3, iar unul este de ordinul 5. Tot Euler a arătat în ce condiții s-ar putea parcurge drumul peste poduri, către insulă, astfel ca să se treacă *numai câte o singură dată* pe fiecare pod, fără se te poți întoarce de unde ai plecat. Soluția arătată de Euler, în secolul al XVIII-lea a fost adoptată de locuitorii din Kaliningrad în secolul al XX-lea: ei au construit efectiv cel de-al 8-lea pod peste Pregel, așa că locuitorii lui se pot plimba, străbătându-le pe rând, fără a mai fi obligați să treacă peste unul de două ori.

Dar această problemă nu-i singura care aparține topologiei și a fost pusă mai înainte ca această știință să se fi conturat. Iată alte două exemple, stabilite în mod intuitiv, tot de rețele închise ce se pot desena printr-o trăsătură continuă la care, în plus, se revine la locul inițial. Una este *pentagrama*: ea are 5 *noduri pare* de ordinul 4 și deci după teorema (2) poate fi trasată în mod continuu. Cealaltă este *pecetea lui Mahomed*: aceasta are forma a două semiluni ce se întretaie și 4 noduri de ordinul 4. Legenda spune că Mahomed a desenat-o, pentru prima oară, cu vârful iataganului pe nisip, fără a-l ridica și fără a trece de două ori peste o linie descrisă. Aceasta a impresionat pe cei de față și au atribuit acestei linii puteri de simbol.



Nu orice rețea închisă poate fi descrisă printr-o trăsătură continuă. De exemplu, se poate demonstra teorema: *O rețea având un număr pereche de noduri impare ($2n$) poate fi descrisă complet prin n drumuri distincte.* Teorema generalizează astfel rezolvarea lui Euler relativ la drumurile peste podurile de pe râul Pregel, în cazul când a adăugat o muchie în plus, (a 8-a), care leagă două noduri de ordinul trei, transformând astfel rețeaua în alta, numai cu două noduri impare. Un exemplu care intră în aceeași categorie este patrulaterul complet, care are două noduri de ordinul trei. De aceea, figura se poate descrie în mod continuu, pornind de la unul din aceste vârfuri și ajungând la celălalt.

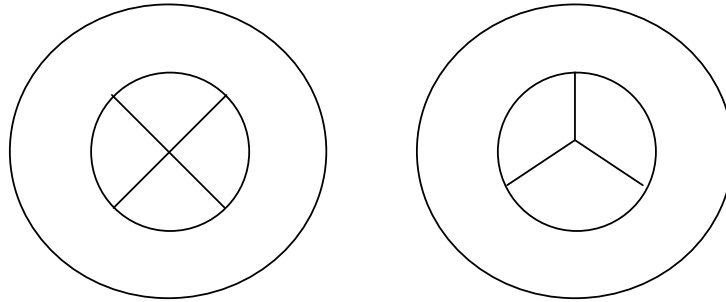
Problema podurilor de pe Pregel, l-a condus pe Euler să rezolve și pe aceea a labirintului. Această problemă este bine cunoscută din antichitate. În *Istoria naturală*, scrisă de *Pliniu cel Bătrân* (24-79 e.n.) se menționează că faraonul Amenemhet al III-lea a poruncit să se construiască primul labirint. După egipteni, regele Minos din Creta a construit alt labirint, arhitect fiind Dedal, care s-a folosit de un plan egiptean. Labirintul din Creta a rămas legat de aventura lui Tezeu. După ce a ucis Minotaurul, el a putut ieși de acolo datorită Ariadnei. Aceasta i-a dat un ghem de sfoară prin care să poată găsi drumul la întoarcere. În vremurile mai noi s-au construit diverse alte asemenea labirinturi (în imaginea de mai sus apare schița cunoscutului labirint -



grădină din apropierea Londrei de la *Hampton-Court*). În revistele cu recreații matematice se găsesc adesea probleme care cer să se afle calea de ieșire din labirint, pe drumul cel mai scurt. Ca să rezolve problema, Euler a observat, mai întâi, că ieșirea din labirint corespunde, de fapt, descrierii unui drum închis, ori, labirintul *nu este o rețea închisă*, el are cu siguranță *două extremități libere*, intrarea și centrul lui. Considerând aceste extremități drept noduri de ordinul I, rezultă că în rețea sunt cel puțin două noduri impare și deci nici un labirint nu poate fi parcurs, străbătându-i cărările câte o singură dată ca să se revină la punctul de plecare. Ideea ingenioasă a lui Euler, după ce a demonstrat teorema a doua, anume că o rețea fără noduri impare este închisă, a fost aceea de a transforma toate nodurile unui labirint în noduri pare. Adică în loc de a trece o singură dată pe fiecare cărare a lui, se trece de două ori, o dată într-un sens și o dată

în sens contrar. În felul acesta toate nodurile devin noduri *pare* și rețeaua este cu siguranță închisă, adică se poate ieși din labirint fără firul Ariadnei. Practic, se procedează în felul următor: imediat la intrare, se indică pe cărarea străbătută sensul în care a fost parcursă, iar atunci când se ajunge la o răspântie se alege numai cărarea care nu a mai fost străbătută încă, iar dacă nu se găsește niciuna neînsemnată, se pornește pe una dintre cărările străbătute o dată, dar în sens invers decât arată semnul de pe ea. Notând aceasta pe peretele opus primei însemnări se poate ocoli orice cărare care are două însemnări pe ea.

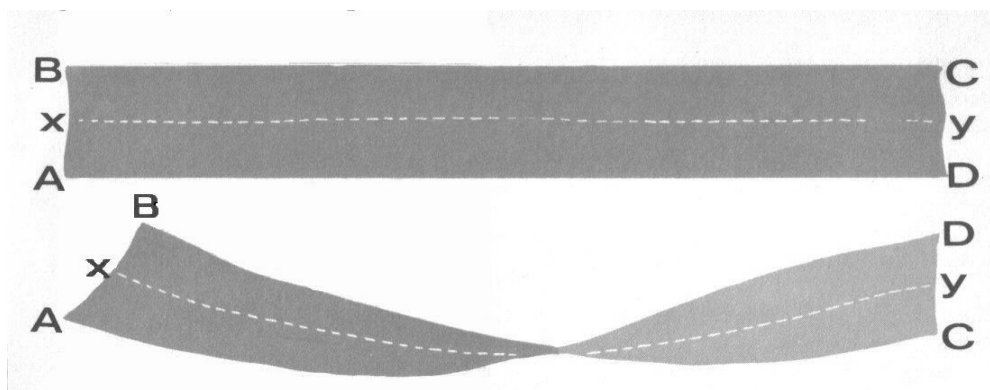
O altă importantă problemă de topologie, de care mai este legat numele lui Euler, are următorul cuprins: *În toate poliedrele convexe, numărul fețelor adunat cu acela al vârfurilor este egal cu numărul muchiilor mărit cu doi.* Notând cu F , V , și M , aceste numere, rezultă formula: $F+V = M+2$. Înainte de Euler formula fusese descoperită de Descartes, de aceea ea poartă numele *Descartes-Euler*. Teorema aparține deopotrivă geometriei în spațiu, cât și topologiei fiindcă, dacă aplicăm poliedrului convex o deformare oarecare (adică îl supunem unei transformări topologice), poliedrul se preface într-o suprafață curbă, iar muchiile poliedrului se transformă în liniile unei rețele care păstrează această relație între elementele ei. Mai mult chiar, formula *Descartes-Euler* se poate modifica în așa fel ca ea să se aplice și în cazul unei rețele de pe o suprafață plană. În acest scop, se poate considera o suprafață poliedrală convexă deschisă, pe care o putem obține tăind din poliedrul convex –presupus gol în interior una din fețele lui. Prin aceasta, numărul muchiilor și al vârfurilor rămâne neschimbat, numai al fețelor se micșorează cu o unitate. Formula se transformă deci în: $F+V = M+1$. O asemenea suprafață poliedrală se poate deforma în mod continuu, până ce se transformă într-o suprafață plană pe care se află o anumită rețea, numită conexă. Vârfurile rămân punctele de pe plan, iar muchiile se transformă în anumite linii continue (deschise) care unesc două dintre vârfuri. Ne-am oprit asupra acestei formule fiindcă ea se găsește implicată în istoria uneia dintre cele mai cunoscute probleme din istoria matematicilor moderne, anume *teorema celor patru culori*. Debutul acestei probleme în domeniul matematicilor s-a făcut prin anul 1850, când un geograf din Edinburg l-a informat pe tânărul matematician Francisc Guthrie că el folosește *cel mult patru culori* ca să coloreze o hartă împărțită în regiuni, fără ca două regiuni apropiate să aibă aceeași culoare și că procedeul este binecunoscut de geografi și aplicat în mod obișnuit, fiind și foarte economic. Fr. Guthrie și-a propus atunci să demonstreze aceasta și a formulat următoarea teoremă : «Patru culori sunt suficiente ca să se coloreze harta unei țări, împărțită în regiuni, sau a unui continent împărțit în țări, fără ca două domenii alăturate să aibă aceeași culoare». Teorema este cunoscută de atunci sub denumirea de *teorema celor patru culori*. Demonstrația nu a putut-o însă stabili tot așa de ușor pe cât formulase teorema. Fiind arătată profesorului *August de Morgan* (1806 - 1870) din Londra, el a comunicat-o mai departe profesorului *Arthur Cayley* (1821 - 1895), pe atunci la Cambridge. Acesta apus în 1878 următoarea întrebare Societății regale de matematici din Londra: Există vreo demonstrație a afirmației că sunt necesare patru culori distincte pentru a colora o țară împărțită în regiuni, în așa fel ca două regiuni vecine să nu fie colorate la fel ? Răspunsul fiind negativ, Cayley a cercetat problema și a publicat, în anul 1879, primul articol despre această problemă, intitulat: *Despre colorarea hărților*. Aici el a enunțat teorema: *Dacă o suprafață este împărțită în mai multe regiuni, oricum ar fi, ele se pot colora numai cu patru culori, în așa fel ca două regiuni ce se ating, să aibă culori deosebite.* Următoarele două desene dovedesc că numărul de patru culori este necesar.



În primul desen, suprafața este împărțită în trei regiuni de forma unor sectoare de cerc având toate un punct comun și, două câte două, o linie comună. La acestea se adaugă o coroană având hotar comun cu fiecare din cele trei regiuni. Se vede clar că patru culori sunt necesare pentru colorarea ei. În cel de-al doilea desen, numărul sectoarelor interioare fiind patru, harta poate fi colorată numai cu trei culori. În încheiere autorul adaugă: *În toate cazurile cunoscute se poate vedea că patru culori sunt și suficiente. Dar nu am găsit o demonstrație generală și este important să explic în ce constă dificultatea. Să considerăm un sistem de n arii colorate, după teoremă, numai cu patru culori. Dacă adăugăm a $(n+1)$ -a arie, nu urmează numaidecât că o putem colora tot cu aceste culori, fără să alterăm colorația originală. De pildă, dacă colorația originală ar fi așa încât toate cele patru culori să fie prezente pe marginea exterioară a celor n regiuni și cea de-a $(n+1)$ -a arie să le înconjoare pe cele n , atunci nu ar fi posibil să rămână o culoare pentru ea.* Articolul a stârnit dintr-o dată un interes deosebit pentru problema aceasta, în particular, și pentru studiul topologiei, în general. Chiar în anul următor *A.B. Kempe* (1849-1922) a stabilit o demonstrație a teoremei celor patru culori, folosind formula Descartes-Euler, adică analogia dintre o hartă plană și o suprafață poliedrală sau un poliedru. Mai întâi el a imaginat un procedeu prin care poate descompune o hartă, ce ar fi colorată în patru culori, în domenii colorate numai cu două culori, legând între ele acele regiuni învecinate de pe hartă ce sunt colorate numai cu două culori dominante dinainte stabilite și alese oricum din cele patru. Această idee a fost generalizată și a găsit aplicații diferite în topologie, domeniile astfel fiind azi cunoscute sub numele de *lanțurile lui Kempe*. Schimbând între ele cele două culori alese cu celelalte două, Kempe a arătat că se poate modifica colorarea hărții, în așa fel încât, în orice vârf să nu fie folosite mai mult decât trei culori diferite. Ca să ajungă la această concluzie, el a stabilit, pornind de la relația Descartes-Euler o nouă formulă, care leagă între ele numărul total al fețelor unui poliedru de numărul fețelor cu un anumit număr de laturi. Articolul lui Kempe a plăcut prin ingeniozitatea lui și demonstrația lui a fost reluată și de alți matematicieni. Așa s-a făcut că, în 1890, *P.J. Heawood*, pe atunci lector la Universitatea din Durham, unde a rămas ca profesor până la sfârșitul vieții, a arătat, în articolul: *Teorema despre colorarea hărții*, că în formula pe care a stabilit-o Kempe era o greșală de calcul și deci teorema celor patru culori nu fusese demonstrată. El a corectat formula și apoi a tras concluzia, de data aceasta definitivă, că: *sunt suficiente cinci culori pentru colorarea oricărei hărți plane sau sferice*. Deși de atunci și până astăzi nu s-a găsit încă o demonstrație generală pentru a lămuri în mod definitiv problema, nu s-a găsit totuși nici un caz particular care să o contrazică. Din contra, în anul 1946, matematicianul belgian *S.M. de Backer* a arătat că o hartă care cuprinde până la 35 de regiuni poate fi colorată cu 4 culori. Prof. *P.J. Heawood*, care a publicat articole legate de această problemă timp de 60 de ani, stabilind foarte multe relații între

domeniul topologiei și acelea ale geometriei, algebrei sau aritmeticii, a mai dovedit și că probabilitatea ca să se găsească o hartă cu mai mult de 36 de regiuni care să nu poată fi colorată cu 4 culori este mai mică decât $10^{-10\ 000} = \frac{1}{10^{10000}}$. În topologie, teorema celor patru culori a rămas una dintre problemele deschise.

A.F. Möbius (1790-1868), unul dintre geometrii cei mai renumiți din secolul al XIX-lea, a făcut o descoperire uluitoare, anume că *pot exista suprafețe cu o singură față*. Deși aceste suprafețe erau ușor de construit și astăzi nu mai miră pe nimeni, în 1858, când Möbius a prezentat Academiei de științe din Paris memoriul despre forma și proprietățile



suprafețelor unilaterale, lucrarea nu a fost luată în considerație, ea fiind privită ca neserioasă. Exemplu de o asemenea suprafață cu o singură față, numită azi *banda lui Möbius*, se obține dacă se taie un dreptunghi de hârtie ABCD și după ce se răsucește o dată, se lipește marginea AB peste DC, astfel ca punctul A să coincidă cu C, iar B cu D. Suprafața nu are decât o singură față și o singură margine, fiindcă o mușcă o poate parcurge fără să sară peste margine, așa cum ar trebui să facă, dacă banda ar fi fost lipită fără răsucire și ar fi format un cilindru. Dacă ar fi să se coloreze această suprafață ar fi de ajuns o singură culoare, pe când, în cazul suprafeței cilindrice ar trebui, eventual, două culori: una în interior și alta în exterior. O altă proprietate tot neobișnuită, apare atunci când banda este tăiată în două, după linia xy, paralelă cu muchia ei. Intuiția ne face să credem că, prin această tăiere, se obțin două bucăți identice, de fapt, se obține o singură bandă, de două ori mai lungă, dar având două fețe distincte. Suprafața lui Möbius este cea mai simplă dintre suprafețele unilaterale, este deschisă și are o singură margine. Exemplu de o altă suprafață unilaterală închisă, adică fără nicio margine, a fost găsit de *Felix Klein* în 1882. Se numește *torul unilater* sau *garafa lui Klein*. Ea se poate obține prin lipirea, de-a lungul marginii, a două benzi Möbius identice.

Deși nu tocmai ușor de imaginat, în mod intuitiv asemenea suprafețe pot fi caracterizate, din punct de vedere topologic, prin proprietățile lor invariabile la anumite transformări.

Am văzut, prin formula Descartes-Euler, că una dintre aceste proprietăți invariabile este exprimată prin numărul muchiilor, o alta prin numărul fețelor. Iată de pildă, cum se prezintă, din punct de vedere topologic sfera și torul (covrig sau inel). Suprafața unei sfere are două proprietăți ce se păstrează prin transformări topologice: a) nu are margini; b) orice curbă închisă de pe suprafața ei o taie în două părți separate. Suprafața torului nu are nici ea margini, dar nu orice curbă închisă, de pe suprafața lui, îl taie în două părți distincte. De exemplu, o curbă meridiană și orice curbă paralelă cu ea nu îl separă în două părți distincte, ci numai îl desface într-un tub, ce ar putea fi

deformat și transformat într-un cilindru, deschis la ambele capete. Tot așa nicio curbă generatoare nu-l separă în două părți distincte. Cilindrul în care a fost prefăcut torul după prima secționare rămâne mai departe o singură bucată dacă-i despici după o generatoare. Numărul maxim de curbe închise, de pe o suprafață, care nu separă suprafața în două părți distincte (prin tăietură), se numește *ordinul de conexiune al suprafeței*. Rezultă, din cele arătate, că ordinul de conexiune al sferei este zero, pe când al torului, este doi, și deci aceste suprafețe nu sunt *echivalente topologic* sau nu sunt *omeomorfe*. Problema de căpetenie a topologiei este să recunoască echivalența topologică a două figuri. Acest lucru însă este destul de greu, și, desigur, că nu poate fi stabilit fără un studiu prealabil, făcut după anumite criterii, așa cum și în geometrie egalitatea sau asemănarea figurilor se decide după anumite criterii, iar unul dintre criteriile de echivalență topologică este *ordinul de conexiunea figurilor*. Deși prin lucrările lui Listing, Cayley și Möbius topologia s-a impus ca obiect de sine stătător, acești matematicieni sunt priviți acum numai ca precursorii topologiei, drept creator al obiectului fiind considerat *Bernhard Riemann* (1826-1866). În urma impulsului dat de Riemann, alți cercetători au aplicat metodele topologiei la diferite probleme de analiză, mecanică-cerească, fizică și altele.

Începând din 1895, *Henry Poincaré* (1854-1912), considerat a fi, până astăzi, ultimul savant universal în domeniul matematicilor, a dezvoltat ideile lui Riemann, stabilind legături mai puternice între metodele algebrice, combinatorii și topologice. La noi în țară, academicianul Simion Stoilov a creat școala românească de topologie. Pe lângă numeroase lucrări publicate de S. Stoilov în acest domeniu, în 1936 a apărut, la Paris, în limba franceză, ca să poată avea o mai largă răspândire, o carte cu caracter de monografie, intitulată: *Leçons desre principiile topologice ale teoriei funcțiilor*. Această carte a fost scrisă de Simion Stoilov la îndemnul profesorului său, matematicianul francez *Emile Borel* (1871-1956) și a avut un deosebit răsunet în lumea topologilor de pretutindeni. Dovada o avem în faptul că i s-a cerut să pregătească o nouă ediție, și aceasta, adăugită cu tot ce s-a mai descoperit în ultimii 20 de ani, a apărut, tot la Paris, în aceeași editură, în anul 1956.

Bibliografie

- [1] Câmpan F., *Vechi și nou în matematică*, Ed. Ion Creangă, București, 1978.
- [2] Chinn W.G., Steenrod N.E., *Introducere în topologie*, Ed. Tehnică, București, 1981.

CENTRUL FORTELOR PARALELE

Elena PUFU, Florica GORNEANU

Școala generală *Liviu Rebreanu*,
Mioveni, Argeș

THE CENTER OF PARALLEL FORCES

Abstract. In this paper, we draw attention upon the mechanics in order to solve problems of physics that are related to parallel forces and especially to the centre of parallel forces. In physics it is considered that if more forces act simultaneously upon a body, these forces can be replaced by a single force which acts upon the body and produces the same effect –the resultant force. In the case of concurrent forces, students can determine the resultant force using the principle of the parallelogram. Not the same thing happens in the case of parallel forces. This work aims to determine the centre of parallel forces, giving examples for two parallel forces of the same direction and of different direction as well as the geometric construction of the centre of parallel forces for the two particular cases. It is necessary to explain the composing of parallel forces in order to understand the composing of the forces that act upon bodies as well as to determine the centre of weight of bodies.

If a system (S) of parallel forces $\mathbf{F}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ applied in $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ points which can slip on their props act upon a rigid solid, then the resultant of the system of forces (S) will be $\mathbf{R}(S) = \sum_{i=1}^n F_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \mathbf{u} = F \cdot \mathbf{u}$, where $F = \sum_{i=1}^n F_i$ and \mathbf{u} is an unitary vector. The resultant moment of the system of forces to any pole O is

$$M_o(S) = \sum_{i=1}^n OA_i \cdot F_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \cdot OA_i \right) \mathbf{u}.$$

According to the result of the canonic reduction, a system of forces can be reduced to a force applied on a certain axis and to a couple of linear moment with the same force, the (S) system of parallel forces is equivalent either with an unique force applied on the central axis of the system or with a couple or with zero.

1. Introducere

Dintre științele fundamentale ale naturii, cea mai veche pare să fie mecanica. Mecanica studiază forma cea mai simplă și mai larg întâlnită de mișcare a materiei: deplasarea reciprocă a corpurilor de dimensiuni uzuale, sub acțiunea lor reciprocă sau a forțelor care produc sau modifică această deplasare în cursul desfășurării ei. Mecanica are ca scop să deducă din date experimentale, principiile generale care să permită descrierea și prevederea fenomenelor de mișcare mecanică sau de echilibru al corpurilor. În mecanică s-a făcut cea dintâi aplicație a matematicii la studiul cantitativ și calitativ al fenomenelor naturii. Mecanica este cea mai matematizată știință, mult timp ea fiind considerată drept o ramură a matematicii.

Opera lui Newton și cea de mai târziu a lui Lagrange părea să fi redus mecanica la o știință pur decorativă, utilizând metodele analizei matematice. Dar cum mecanica a servit în secolele XVIII și XIX ca bază pentru dezvoltarea fizicii, este de înțeles de ce mecanica este considerată de unii doar un capitol al matematicii sau un capitol al fizicii.

În realitate, mecanica nu se rezumă doar la principiile newtoniene și la consecințele matematice ale celor trei legi celebre enunțate de Newton, ea este o știință teoretică și experimentală⁴.

Dezvoltarea mecanicii s-a făcut simultan cu cea a matematicii, progresul uneia dintre aceste științe având drept consecință progresul celeilalte. Putem afirma că mecanica este prima dintre științele naturii care a utilizat în cel mai înalt grad metodele de investigație matematică, pe lângă metodele experimentale și de observație. Astfel, dezvoltarea mecanicii a constituit un model și pentru celelalte științe ale naturii ca: fizica, chimia și biologia, care au urmat și urmează un proces de matematizare analog.

Pe de altă parte, mecanica servește ca fundament pentru studiul acestor științe, deoarece orice formă superioară de mișcare a materiei, cum ar fi cea fizică, chimică sau biologică, cuprinde în mod necesar formele de mișcare mai simplă ce constituie obiectul mecanicii.

Studiul fizicii începe obligatoriu cu cel al mecanicii ale cărei noțiuni fundamentale și legi fundamentale (principiile mecanicii) sunt apoi folosite în toate capitolele fizicii.

În această lucrare evidențiem necesitatea cunoașterii noțiunilor matematice și de mecanică pentru rezolvarea problemelor fizicii legate de forțe paralele și în special de centrul forțelor paralele.

La fizică, în studiul compunerii forțelor, se consideră că dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe, aceste forțe pot fi înlocuite cu o singură forță care acționând asupra corpului produce același efect - forța rezultantă. Pentru determinarea forței rezultante în cazul forțelor concurente, elevii cunoscând principiul paralelogramului pot determina ușor această forță rezultantă. Nu același lucru se întâmplă și cu compunerea forțelor paralele.

Lucrarea își propune să determine matematic centrul forțelor paralele, exemplificând pentru două forțe paralele de același sens și de sens opus, cât și construcția geometrică a centrului forțelor paralele pentru cele două cazuri particulare.

Explicarea compunerii forțelor paralele este necesară atât pentru înțelegerea compunerii forțelor ce acționează asupra corpurilor, cât și pentru determinarea centrului de greutate al corpurilor.

2. Centrul forțelor paralele

Dacă asupra unui solid rigid acționează un sistem (S) de forțe paralele F_i ($i=1, 2, \dots, n$) aplicate în punctele A_i ($i=1, 2, \dots, n$), ce pot să alunece pe suporturile lor, atunci rezultanta sistemului de forțe (S) va fi:

$$R(S) = \sum_{i=1}^n F_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) u = F \cdot u \quad (1)$$

unde $F = \sum_{i=1}^n F_i$ și u este un vector unitar (adică un vector paralel cu direcția forțelor considerate și cu un sens bine determinat); $F_i = F_i u$, ($i=1, 2, \dots, n$)

⁴ Caius Iacob - *Matematica aplicata si mecanică*

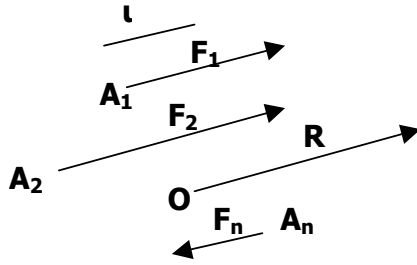


Fig.1 Centrul forțelor paralele

Momentul rezultat al sistemului de forțe (S) față de un pol oarecare O este:

$$M_o(S) = \sum_{i=1}^n OA_i \cdot F_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \cdot OA_i \right) \mathbf{u} \quad (2)$$

Ansamblul $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_o(S)\}$ formează torsonul $\tau_o(S)$ în polul O .

Conform rezultatelor de la reducerea canonică (un sistem de forțe poate fi redus la o forță aplicată pe o anumită axă și la un cuplu de moment collinear cu această forță), sistemul (S) de forțe paralele este echivalent fie cu o forță unică aplicată pe axa centrală a sistemului, fie cu un cuplu, fie cu zero⁵.

Determinăm centrul forțelor paralele pentru două cazuri:

- 1) $F \neq 0$
- 2) $F = 0$

Cazul 1) $F \neq 0 \Rightarrow R \neq 0$

Dacă $F \neq 0$, sistemul de forțe paralele este echivalent cu forța unică $\mathbf{R}(S)$ dată de relația (1) și care este aplicată pe axa centrală a sistemului. Această axă, paralelă cu \mathbf{u} , trece prin punctul G definit prin:

$$OG = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n F_i \cdot OA_i \quad (3)$$

și avem:

$$M_o(S) = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot OA_i}{F} \cdot F\mathbf{u} = OG \cdot \mathbf{R}(S) \quad (4)$$

Această relație ne arată că dacă considerăm sistemul (Σ) format din forța $\mathbf{F}_G(S)$ aplicată în punctul G definit în relația (3) și egală cu $\mathbf{R}(S)$, tensorul lui (Σ) este egal în polul O cu tensorul lui (S). Deci, sistemul (S) este echivalent cu forța $\mathbf{R}_G(S)$; axa centrală a lui (S) este suportul lui $\mathbf{R}_G(S)$.

Se observă că momentul rezultat al sistemului (S) în polul G este nul.

$$M_G(S) = M_o(S) + GO \cdot \mathbf{R}_G(S) = 0 \quad (5)$$

Același lucru rezultă și din relația (4) pentru $O=G$.

Punctul G definit de relația (3) se numește *centrul forțelor paralele*. El posedă câteva proprietăți remarcabile precum:

- Nu depinde de alegerea originii O – polul față de care se calculează momentul rezultat al sistemului de forțe;
- Depinde numai de punctele de aplicație ale forțelor;
- Este independent de direcția forțelor paralele, adică de versorul \mathbf{u} .

⁵ Caius Iacob – *Mecanica teoretică*, EDP, 1980

Putem concluziona pentru acest caz: centrul forțelor paralele nu depinde decât de mărimile algebrice ale forțelor și nu de direcția lor. Această proprietate conduce la definiția centrului de greutate.

Cazul 2) $F=0 \Rightarrow R=0$

Dacă $F = 0$, sistemul de forțe paralele (S) este echivalent cu un cuplu de moment $\mathbf{M}(S)$ perpendicular pe direcția comună a forțelor. Dacă momentul cuplului, $\mathbf{M}(S)$ este nul, sistemul este echivalent cu zero.

Expresia momentului $\mathbf{M}(S)$ poate fi acum:

$$\mathbf{M}(S) = \mathbf{b}(S) \cdot \mathbf{u} \quad (6)$$

unde

$$\mathbf{b}(S) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \mathbf{OA}_i \quad (7)$$

Vectorul $\mathbf{b}(S)$ depinde numai de sistemul (S) și nu depinde de alegerea punctului O .

Mai putem afirma că sistemul (S), de rezultantă generală nulă, este echivalent cu un cuplu sau este echivalent cu zero, după cum

- $\mathbf{b}(S)$ este diferit de zero și neparalel cu \mathbf{u}
- $\mathbf{b}(S)$ este nul sau este paralel cu \mathbf{u}

3. Cazuri particulare de compunerea forțelor paralele

3.1 Cazul a două forțe paralele și de același sens

3.1.1. Centrul a două forțe paralele de același sens

Fie forțele paralele și de același sens $F_1 = F_1 \mathbf{u}$ și $F_2 = F_2 \mathbf{u}$ aplicate în punctele A_1 și respectiv A_2 cu $F_1 > 0$ și $F_2 > 0$ (fig.2).

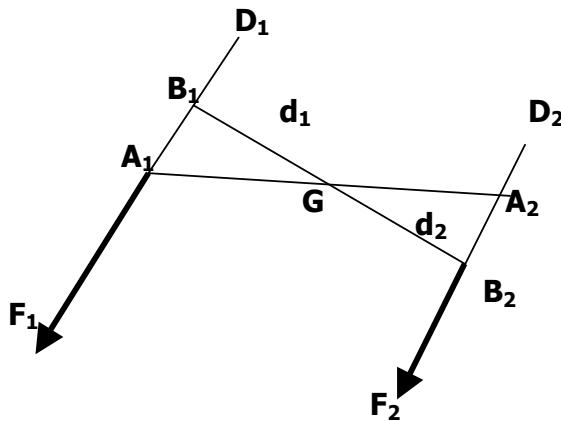


Fig.2. Centrul a două forțe paralele de același sens

Conform rezultatelor precedente, centrul G al acestor forțe este definit prin:

$$OG = \frac{F_1 \cdot OA_1 + F_2 \cdot OA_2}{F_1 + F_2} \quad (8)$$

unde O este o origine arbitrară. Acest centru se găsește pe segmentul A_1A_2 .

Din punct de vedere fizic, rigidul este în echilibru dacă momentele forțelor sunt egale, adică

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \quad (9)$$

unde d_1 și respectiv d_2 sunt distanțele de la centrul forțelor paralele G la suporturile forțelor.

Momentele lui F_1 și F_2 față de G sunt perpendiculare pe planul definit de suporturile d_1 și d_2 și care conține punctul G . Ele sunt egale în mărime, dar de sens opus, ceea ce implică $M_G(S)=0$.

Sistemul (S) format din forțele F_1 și F_2 este echivalent cu o forță unică $R_G(S)=F_1+F_2$ aplicată în G (centrul forțelor paralele), iar punctul G împarte segmentul A_1A_2 în raportul

$$\frac{A_1G}{A_2G} = \frac{F_2}{F_1} \quad (10)$$

Din figura 2 observăm că $\triangle GA_1B_1$ și $\triangle GA_2B_2$ sunt asemenea și avem

$$\frac{A_1G}{A_2G} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

Regăsim astfel relația 9 care caracterizează centrul forțelor paralele, G .

3.1.2. Construcția geometrică a centrului a două forțe paralele de același sens

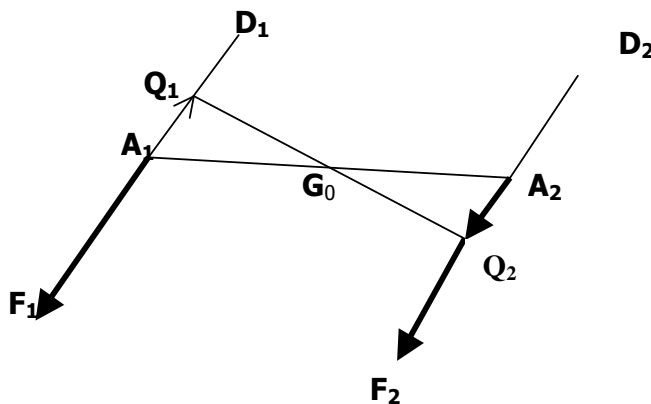


Fig.3.

Se construiește din A_1 pe suportul lui F_1 vectorul $A_1Q_1=-F_2$ și din A_2 pe suportul lui F_2 vectorul $A_2Q_2=F_1$. Intersecția G_0 a dreptei Q_1Q_2 cu dreapta A_1A_2 coincide cu punctul G (fig.3).

Din asemănarea triunghiurilor $G_0A_1Q_1$ și $G_0A_2Q_2$ avem:

$$\frac{A_1Q_1}{A_2Q_2} = \frac{A_1G_0}{A_2G_0} = \frac{F_2}{F_1} \quad (11)$$

Astfel ajungem la concluzia că G_0 și G aparțin segmentului A_1A_2 pe care-l împart în același raport. Deci G_0 coincide cu G .

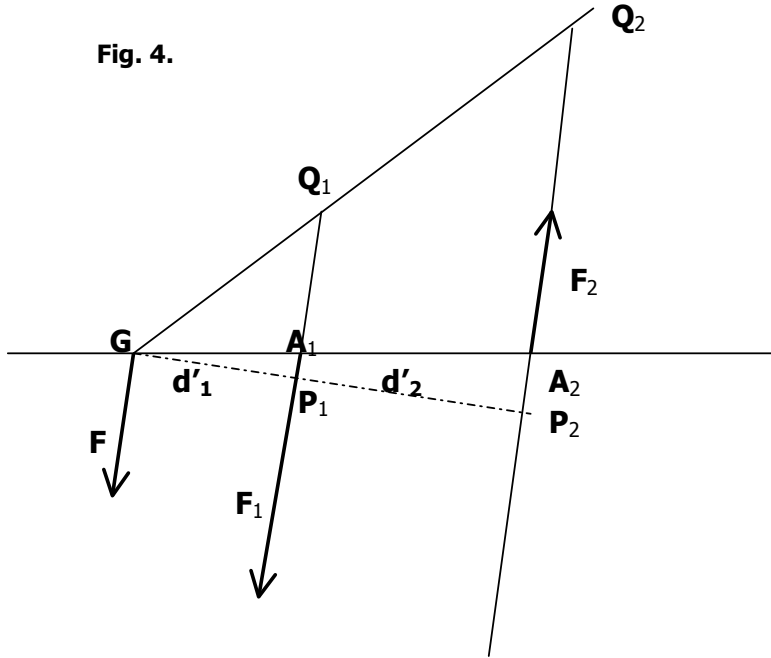
3.2 Cazul a două forțe paralele de sens opus

Considerăm forțele $F_1=F_1\mathbf{u}$ și $F_2=F_2\mathbf{u}$ cu $F_1>0$ și $F_2<0$.

Dacă $F_1+F_2 \neq 0$ avem centrul G al acestor forțe definit prin:

$$OG = \frac{F_1 \cdot OA_1 + F_2 \cdot OA_2}{F_1 + F_2} \quad (12)$$

Fig. 4.



Dacă $F_1 + F_2 > 0$, deci dacă forța F_1 este de mărime mai mare ca aceea lui F_2 , atunci punctul G se găsește în exteriorul segmentului A_1A_2 , pe porțiunea negativă a axei d , iar rezultanta $R = (F_1 + F_2)\mathbf{u}$ aplicată în G are sensul lui F_1 .

Dacă $F_1 + F_2 < 0$, dacă forța F_1 este de mărime mai mică decât mărimea lui F_2 , atunci punctul G se găsește pe axa d , pe porțiunea pozitivă, la exteriorul segmentului A_1A_2 , la dreapta lui A_2 (figura 4).

Construcția geometrică a punctului G

Se consideră vectorii $A_1Q_1 = F_2$ și $A_2Q_2 = -F_1$ aplicați respectiv în A_1 și A_2 . Dreapta Q_1Q_2 ce unește extremitățile lor intersectează dreapta A_1A_2 în punctul G .

Din asemănarea triunghiurilor GA_1Q_1 și GA_2Q_2 avem:

$$\frac{A_1Q_1}{A_2Q_2} = \frac{GA_1}{GA_2} \quad (13)$$

unde $A_1Q_1 = |F_2|$ și $A_2Q_2 = |F_1|$

Observație. Sistemul de vectori paraleli format din $\{-F_1, -F_2\}$ aplicați în A_1 și A_2 admite același centru ca sistemul $\{F_1, F_2\}$.

Am considerat important să prezentăm compunerea forțelor paralele, la nivelul de înțelegere al elevilor de gimnaziu deoarece la rezolvarea problemelor legate de compunerea forțelor, elevii sunt tentați să reprezinte forțele concurente a căror direcție face un unghi de 0° ca două forțe paralele puțin distanțate. Totodată acest lucru este necesar și pentru înțelegerea determinării centrului de greutate al corpurilor.

Bibliografie

- [1] Caius Iacob, *Matematică aplicată și mecanică*, Editura Academiei, București, 1989.
- [2] Caius Iacob, *Mecanică teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [3] Dugas R., *Histoire de la Mécanique*, Editura Dunad, Paris, 1950.
- [4] Hristev A., *Mecanică și acustică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
- [5] *** *Compendiu de fizică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
- [6] *** *Manualele de fizică pentru gimnaziu și liceu (clasele a VII-a și a IX-a)*.

O CUTIE... DAR NU A PANDOREI!

Mariana RĂDULESCU*, Daniela BERECHET*, Florian BERECHET**

*Școala generală *Liviu Rebreanu* Mioveni-Argeș

**Școala generală *George Topârceanu* Mioveni-Argeș

A BOX ... BUT NOT PANDORA' S!

Abstract. Johan Peter Gustav Lejeune-Dirichlet was one of the greatest mathematicians of the XIX-th century. Due to him we have "the box principle" or "the drawers principle" which says: if we place $n + 1$ objects in n boxes then at least one box contains at least 2 objects". Another term for this principle is "the rabbits and cages principle". To apply the Dirichlet's principle in problem solving we need to indicate *which (what)* are the "boxes" and *which (what)* are the "objects". Even if Dirichlet's box principle is based on one of the simplest mathematical observations, solving problems by using this method is not an easy task. Many problems (especially for geometry) can be solved using the Dirichlet's principle. For example:

- if on a segment with the length l there are situated some segments with the sum of their lengths bigger than l , then at least two segments have a common point;
- if inside a figure with an area S we placed some figures with the sum of their areas bigger than S then there are at least two figures which have a common point;
- if the figures F_1, F_2, \dots, F_n with the areas S_1, S_2, \dots, S_n are included in the figure F with its area S and $S_1 + S_2 + \dots + S_n > kS$ then $k + 1$ from the figures F_1, F_2, \dots, F_n have a common point.

Care este principiul cutiei?

În multe dintre problemele de matematică școlară se utilizează în rezolvare principiul cutiei, numit și *principiul lui Dirichlet*.

Dirichlet a influențat decisiv dezvoltarea multor ramuri ale matematicii. De exemplu, el a fost primul care a observat că în unele inele de întregi pătratici, descompunerea unui număr ca produs de factori ireductibili nu este unică. Această observație a avut ulterior implicații profunde în dezvoltarea teoriei numerelor. În teoria numerelor, Dirichlet a demonstrat, printre altele, teorema : *Dacă a și b sunt numere întregi și $(a,b) = 1$, atunci în șirul $(an+b)_{n \in \mathbb{N}}$ există o infinitate de numere prime.* În teoria potențialului s-a ocupat de existența funcțiilor armonice și tot el a dat și condiția Dirichlet pentru convergența seriilor trigonometrice.

Tot lui Dirichlet îi datorăm *principiul cutiei*, care face subiectul acestui articol. Principiul cutiei se poate enunța astfel: *Dacă plasăm $n + 1$ obiecte în n cutii, atunci cel puțin o cutie conține cel puțin 2 obiecte.* Un alt enunț, poate mai sugestiv, este următorul: *Dacă repartizăm n iepuri în $n + 1$ cuști, sigur va fi o cușcă în care stau cel puțin doi iepuri.* De aceea, acest principiu se mai numește și *principiul iepurilor și cuștilor*.

Pentru aplicarea principiului lui Dirichlet este necesar de indicat *cine (ce)* sunt *cutiile* și *cine (ce)* sunt *obiectele*. Chiar dacă principiul cutiei lui Dirichlet se bazează pe una din cele mai simple observații matematice, rezolvarea problemelor folosind această metodă nu este o sarcină prea ușoară. Există destule probleme ale căror soluții se pot obține mult mai ușor dacă se folosește principiul cutiei lui Dirichlet.

Exemple

Problema 1. (Olimpiada de matematică – faza județeană – clasa a V-a 2006, Argeș)

Demonstrați că din oricare 4 numere naturale diferite putem alege două astfel încât suma cifrelor diferenței lor să fie multiplu de 3.

Soluție. Restul împărțirii unui număr natural la 3 este unul din numerele 0, 1 sau 2 și cum avem 4 numere, atunci conform principiului cutiei lui Dirichlet există două numere naturale, care dau același rest la împărțirea cu 3. Diferența acestor două numere va fi divizibilă cu 3, deci suma cifrelor diferenței va fi multiplu de 3, conform criteriului de divizibilitate cu 3.

Problema 2. *Să se demonstreze că, printre orice șase numere întregi există două numere a căror diferență este divizibilă cu 5.*

Soluție. Restul împărțirii unui număr întreg la 5 este unul din numerele 0, 1, 2, 3, 4, deci sunt 5 resturi și cum numărul numerelor întregi este 6 (mai mare decât 5), atunci, conform principiului lui Dirichlet, există cel puțin două numere întregi care dau același rest la împărțirea cu 5. Rezultă că diferența lor este divizibilă cu 5.

Problema 3. *Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, există un număr natural format din cifrele 0 și 5, divizibil prin n .*

Soluție. Considerăm numerele $a_1 = 50$, $a_2 = 5050$, ..., $a_n = \underbrace{5050\dots 50}_{2n}$ pe care le

repartizăm în cutii numerotate cu numerele 0, 1, ..., $n - 1$ (care reprezintă resturile împărțirii la n). Dacă în cutia 0 este un obiect (adică un număr), atunci problema este rezolvată. În caz contrar, n obiecte sunt plasate în $n - 1$ cutii și conform principiului lui Dirichlet, există două obiecte plasate în aceeași cutie. Deci, există două numere care dau același rest la împărțirea prin n . Diferența lor va fi divizibilă prin n , iar diferența lor este un număr format tot din cifrele 0 și 5.

Problema 4. *Se consideră două numere naturale m și n . Se cere să se determine dacă există două numere naturale și distincte p și q , astfel încât $m^p - m^q$ să fie divizibil cu n .*

Soluție. Considerăm numerele $m^0, m^1, m^2, \dots, m^n$. În total sunt $n + 1$ numere. Resturile împărțirii acestor numere la n sunt din mulțimea $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Sunt în total n resturi, generate de $n + 1$ numere și atunci, conform principiului lui Dirichlet, există două numere distincte m^p și m^q care dau același rest la împărțirea prin n . Rezultă că diferența $m^p - m^q$ este divizibilă cu n .

Problema 5. *Se consideră o mulțime C de cifre care să conțină și cifra 0. Să se determine un multiplu al unui număr n care este format din toate cifrele din C .*

Soluție. Fie $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ mulțimea cifrelor date. Să presupunem $c_k = 0$. Vom considera numărul $A = c_1c_2\dots c_k$ și șirul de numere: $x_1 = A$, $x_2 = AA$, $x_3 = AAA$, ..., $x_n = AA\dots A$ (de n ori).

Resturile împărțirii lui x_i la n sunt numere întregi din mulțimea $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Dacă unul din resturi este 0, atunci numărul corespunzător este soluția problemei. În caz contrar, vom avea $n - 1$ tipuri de resturi generate de n numere, deci, conform principiului lui

Dirichlet, două resturi sunt egale și dacă scădem numerele corespunzătoare ($x_i - x_j$) vom obține un număr divizibil cu n (pentru că restul împărțirii la n este 0).

Problema 6. *Demonstrați că printre oricare n numere naturale nenule, cel mult egale cu $2n-2$, există două numere care au suma impară.*

Soluție. Construim mulțimile $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n-2\}$. Vom avea în total $n-1$ mulțimi. Alegând n numere, conform principiului lui Dirichlet, există două numere care aparțin aceleiași mulțimi, iar suma lor este impară.

Problema 7. *Fie A o mulțime cu n elemente. Să se arate că, dacă alegem mai mult decât jumătate dintre submulțimile mulțimii A , atunci două dintre acestea au proprietatea că una este inclusă în cealaltă.*

Soluție. Știm că o mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi. Fie x un element din A și fie $B = A - \{x\}$. Pentru fiecare submulțime S a lui B vom forma perechea $\{S, S \cup \{x\}\}$. Aceste perechi formează o partiție a mulțimii A . Dacă alegem mai mult de jumătate dintre submulțimile lui A , conform principiului cutiei, vor exista două care se află în aceeași pereche, iar două mulțimi din aceeași pereche au proprietatea că una din ele este inclusă în cealaltă.

Problema 8. *Intr-o cutie sunt 12 bile roz, 10 bile mov, 10 bile verzi și 6 bile orange. Se extrag din cutie n bile la întâmplare. Să se determine numărul minim de bile ce trebuie extrase, astfel încât să avem:*

- a) *nu mai puțin de 4 bile de aceeași culoare;*
- b) *câte o bilă de fiecare culoare;*
- c) *cel puțin 4 bile de culoare mov.*

Soluție. a) Numărul minim este 13, atunci când se extrag câte 3 bile de fiecare culoare (12 bile), iar ultima va avea aceeași culoare cu una din celelalte grupe.
 b) Numărul minim este $12 + 10 + 10 + 1 = 33$ bile (se extrag toate bilele roz, toate bilele mov, toate bilele verzi și o bilă orange).
 c) Numărul minim este $12 + 10 + 6 + 4 = 32$ bile (se extrag toate bilele roz, toate bilele verzi, toate bilele orange și 4 bile mov).

Problema 9. *Într-o școală sunt 1100 de elevi. Să se arate că există o zi în care cel puțin 4 elevi își sărbătoresc ziua de naștere.*

Soluție. Un an bisect are 366 zile și $1100 = 366 \cdot 3 + 2$, deci conform principiului lui Dirichlet există o zi în care s-au născut cel puțin $3 + 1 = 4$ elevi. Cu atât mai mult dacă anul nu este bisect.

Unele probleme (în special ce țin de geometrie) se rezolvă, utilizând principiul lui Dirichlet în următoarele enunțuri :

- a) *dacă pe un segment de lungime l sunt situate câteva segmente cu suma lungimilor mai mare ca l , atunci cel puțin două segmente au un punct comun ;*
- b) *dacă în interiorul unei figuri de arie S sunt plasate figuri cu suma ariilor mai mare decât S , atunci există cel puțin două dintre aceste figuri care au un punct comun ;*

c) dacă figurile F_1, F_2, \dots, F_n cu ariile S_1, S_2, \dots, S_n respectiv sunt incluse în figura F cu arie S și $S_1 + S_2 + \dots + S_n > kS$, atunci $k+1$ din figurile F_1, F_2, \dots, F_n au un punct comun.

Problema 10. *Să se arate că printre oricare 5 puncte situate în interiorul unui triunghi echilateral de latură l există cel puțin două puncte situate la o distanță mai mică sau egală cu $l/2$.*

Soluție. Împărțim triunghiul dat în 4 triunghiuri echilaterale congruente prin trasarea liniilor mijlocii. Laturile acestor tringhiuri având lungimea $l/2$, putem deduce că două puncte situate în interiorul aceluiași triunghi nu se pot afla la o distanță mai mare de $l/2$ unul față de celălalt. Conform principiului cutiei (deoarece avem 4 triunghiuri și 5 puncte), două puncte se vor găsi în interiorul aceluiași triunghi, deci distanță dintre ele va fi mai mică sau egală cu $l/2$.

Problema 11. *Să se arate că unul din mijloacele segmentelor determinate de 5 puncte din plan, de coordonate întregi are de asemenea tot coordonate întregi.*

Soluție. Fie cele 5 puncte $A(a,b)$, $B(c,d)$, $C(e,f)$, $D(g,h)$, $E(m,n)$ de coordonate numere întregi. Conform principiului lui Dirichlet, dintre cele 5 puncte cel puțin 3 au abscisele cu aceeași paritate și dintre acestea vor exista două cu ordonata cu aceeași paritate. Mijlocul segmentului determinat de aceste două puncte are coordonate întregi, deoarece media aritmetică a două numere întregi de aceeași paritate este tot un număr întreg.

Problema 12. *Într-un dreptunghi cu dimensiunile 3 cm și 4 cm sunt plasate 6 puncte. Să se arate că printre aceste puncte există cel puțin două cu distanța dintre ele cel mult egală cu $\sqrt{5}$ cm.*

Soluție. Împărțim dreptunghiul inițial în 6 dreptunghiuri mici congruente cu dimensiunile 1 cm și 2 cm, ale căror diagonale au lungimile egale cu $\sqrt{5}$ cm și considerăm unul din cele 6 puncte situat pe una din drepte care au împărțit dreptunghiul. Distanța dintre oricare două puncte situate în același dreptunghi mic este cel mult egală cu $\sqrt{5}$. Dacă într-unul din cele 6 dreptunghiuri mici în care se află punctul respectiv se mai află încă un punct, atunci problema este rezolvată. În caz contrar, mai rămân 4 dreptunghiuri mici în care sunt distribuite 5 puncte, și conform principiului cutiei, va exista sigur un dreptunghi mic în care sunt plasate două puncte. Cele două puncte se află la o distanță mai mică sau egală cu $\sqrt{5}$.

Problema 13. *Să se arate că printre n drepte neparalele două câte două situate în plan, există drepte cu unghiul între ele mai mic decât $\frac{180^\circ}{n}$.*

Soluție. Alegem în plan un punct prin care trasăm paralele la cele n drepte. Aceste paralele împart planul în $2n$ unghiuri cu suma măsurilor egală cu 360° . Deci, există cel puțin un unghi cu măsura mai mică decât $\frac{180^\circ}{n}$.

Problema 14. *Fiind date 25 puncte în plan astfel încât în orice triplet există o pereche de puncte situate la o distanță mai mică decât 2, să se arate că există un cerc de rază 2 ce conține 13 puncte din cele 25 de puncte.*

Soluție. Fie M unul din punctele date. Dacă celelate puncte sunt în interiorul cercului C_1 de rază 2 și centrul în M , atunci problema este soluționată. Fie P unul din punctele situate în exteriorul cercului C_1 și construim cercul C_2 de rază 2 și centrul în P . Dacă X este un punct arbitrar din cele 25 de puncte date, atunci printre punctele M, P, X există două cu distanța dintre ele mai mică decât 2. Astfel, cercurile C_1 și C_2 conțin toate punctele inițiale și conform principiului lui Dirichlet, în interiorul unuia dintre cercuri se vor afla cel puțin 13 puncte.

Problema 15. *În interiorul unui pătrat de latură 1 sunt plasate câteva cercuri, având suma lungimilor egală cu $10\sqrt{2}$. Să se arate că există o dreaptă care intersectează cel puțin 4 din aceste cercuri.*

Soluție. Vom proiecta cercurile pe una din laturile pătratului. Proiecția fiecărui cerc este un segment cu lungimea egală cu lungimea diametrului cercului respectiv. Suma tuturor acestor segmente este $\frac{10\sqrt{2}}{\pi} > 3,1$. Conform principiului lui Dirichlet, există cel puțin patru segmente care au un punct comun, iar perpendiculara ridicată în acest punct pe latura pătratului va intersecta cel puțin 4 cercuri.

Problema 16. *Fiind date 6 puncte situate în interiorul unui cerc de rază 1, să se arate că există 2 puncte la o distanță cel mult egală cu 1.*

Soluție. Trăsăm 6 raze, astfel încât să împărțim cercul în 6 sectoare egale și unul din cele 6 puncte să fie situat pe una din raze. Distanța dintre două puncte situate în același sector este cel mult egală cu 1. Dacă într-unul dintre cele două sectoare în care se află punctul respectiv se mai află încă un punct, atunci problema este rezolvată. În caz contrar, mai rămân 4 sectoare în care sunt dispuse 5 puncte și conform principiului lui Dirichlet, va exista cel puțin un sector în care sunt situate două puncte. Cele două puncte din același sector se află la o distanță cel mult egală cu 1.

Bibliografie

- [1] Ghioca, A., Tedorescu, N., *Culegere de probleme*, Editura SSMR, București, 1987.
- [2] Georgescu, H., *Principiul cutiei lui Dirichlet*, Gazeta de Informatică nr.9-10, Editura Computer Press Agora, Cluj-Napoca, 1994.
- [3] Ganga, M., *Teme și probleme de matematică*, Ed. Tehnică, București, 1991.
- [4] Minuț, P., *Teoria numerelor*, Ed. Matrix-Rom, București, 2001.
- [5] Ufnarovski, V.A., *Acvariu matematic*, Ed. Știința, Chișinău, 1988.

METODA TAGUCHI ȘI MANAGEMENTUL CALITĂȚII

Liliana SĂNDULESCU

S.C. Floyd Advertising Design & Consulting S.R.L.
București

TAGUCHI METHODS AND QUALITY MANAGEMENT

Abstract. In a competitive economy, the demand for a product is greatly affected by its quality and selling price. The selling price is determined by the total production cost, the marketing cost (sales expenses), and the profit margin. Therefore the total production cost (hereafter referred to as cost) and the quality are very important characteristics of a product. Genichi Taguchi has provided great insights into the meaning of quality and cost. He interprets quality and cost from the viewpoint of their impact on the whole society, not just from the viewpoints of the producers and the customers.

Dicționarul de statistică generală definește calitatea astfel: *Ansamblul de proprietăți și caracteristici ale unui produs sau serviciu care îi conferă acestuia aptitudinea de a satisface necesitățile exprimate sau implicite.*

Producția de serie mare și serviciile prestate, de cele mai multe ori pentru persoane care nu provin din țara respectivă, au dus la necesitatea obiectivă de sistematizare și globalizare a cerințelor pe care trebuie să le îndeplinească produsele rezultate pentru a satisface clientul. Acest fapt a determinat specialiștii (mai întâi pe cei din domeniul militar) să creeze standarde pentru produse, procese și loturi de produse.

Pornind de la conceptul de calitate, care a suferit transformări de-a lungul timpului, activitatea de standardizare s-a îmbogățit. Schimburile economice dintre țări a dus la necesitatea de a folosi aceleași "instrumente" pentru a obține aceeași calitate.

Pentru a avea o coerență în ceea ce privește impunerea normelor care guvernează obținerea unui produs sau serviciu de calitate, a fost necesar să se înființeze *ISO* (Organizația Internațională de Standardizare), în anul 1947. *ISO* nu este o prescurtare, ci un nume derivat din cuvântul grecesc *isos* – egal, care este rădăcina prefixului *iso*, ce apare în mulți termeni, cum ar fi: izometric (de mărime sau dimensiuni egale) și izonomie (egalitatea legilor sau a oamenilor în fața legii). De la "egal" la "standard" este ușor de urmărit ideea care a făcut alegerea lui "ISO" ca nume al organizației. Această alegere duce la eliminarea unei mulțimi de prescurtări rezultate din traducerea lui în limbile naționale ale membrilor ei. Indiferent de țară, forma scurtă a numelui organizației este pretutindeni *ISO*.

ISO este o organizație neguvernamentală. Nu este parte a Organizației Națiunilor Unite, deși are legături cu aproape toate organismele și agențiile specializate ale ONU. Membrii săi, cca 120 de țări, nu sunt delegații guvernamentale, ci institute sau organizații naționale de standardizare, câte unul/una din fiecare țară.

Elaborarea standardelor internaționale este, în general, încredințată comitetelor tehnice ale *ISO*. Colaborează strâns cu Comisia Electrotehnică Internațională în ceea ce privește

standardizarea în domeniul electrotehnicii. Standardele internaționale sunt elaborate în conformitate cu regulile din Directivele ISO/ CEI, Partea 2.

Evoluția istorică a umanității și explozia industrială a sec. al XX-lea, au făcut ca în domeniul calitologiei numărul, importanța și complexitatea problemelor să crească an de an. De aceea, sistematizarea cerințelor impuse pentru obținerea nivelului de calitate dorit s-a îmbunătățit permanent, ajungându-se la elaborarea unor sisteme complexe de managementul calității (managementul calității totale).

Management înseamnă politici, obiective, planuri, procese, deci sistem; cu condiția ca acestea să fie vizibile, nu confidențiale, încurajând comunicarea internă, străpungerea barierelor între persoane, în cadrul lucrului în echipă – și între compartimente - prin intermediul proceselor corelate în sistemul de management.

Exemplul cel mai concludent este cel al Sistemului de management al calității, ce face obiectul familiei de standarde ISO 9000, care a apărut în anul 1994 și, apoi, cu îmbunătățiri în anul 2000, fiind ediție în vigoare.

Între grupele de standarde care au apărut în lume, cele care se referă la *controlul statistic* ocupă un loc important. Pentru a se pune în practică acest concept de control statistic, a fost nevoie să se identifice *tehnicele statistice* care pot determina calitatea unitatii de produs, a lotului de produse sau a procesului.

Printre primele standarde apărute și folosite în lume, care se ocupă de aceste concepte, sunt standardele americane:

- MIL STD 105E (pentru inspectia calității pe atribut) și respectiv,
- MIL STD 414 (pentru inspectia calitatii pe bază de măsurare).

Inspectia, inventată la începutul sec. al XX-lea a devenit, prin anii 1940 un mijloc al controlului și anume, sursa acestuia de date - materia primă pentru tehnologia statistică. **Controlul** a devenit, la rândul lui, un mijloc privind calitatea, lansat prin standarde militare (cele menționate mai sus), la începutul anului 1960 și puternic impulsat prin certificarea cu un standard internațional: ISO 9001/ 9002/ 9003.

Asigurarea privind calitatea este producător de dovezi privind ținerea sub control a 20 (dupa ISO 9001), a 19 (dupa ISO 9002), a 16 (dupa ISO 9003) procese afectând calitatea. Ținerea sub control a proceselor se realizează prin documentarea, planificarea și respectarea planurilor, care pot fi: tehnologii, grafice de lucrări, plan de inspecții și încercări ingineresti sau proceduri și instrucțiuni de lucru manageriale. Asigurarea privind calitatea se ocupă de procese pentru că modul de lucru este cauza produsului conform (atunci când procesele sunt ținute sub control) și a produsului neconform (atunci când procesele se desfășoară la ochi, după ureche). Așa cum spunea marele guru al calității, Joseph M. Juran, într-un interviu acordat revistei "Quality Progress", mai 2004, "statistica este un element foarte important în managementul calității, dar, pentru a avea succes este nevoie de mult mai multe lucruri".

După standardele militare americane, în România au aparut standardele sub sigla STAS 3160-1,2,3/ '84. În țara noastră, Asociația de Standardizare din România (ASRO) a trecut, după 1989, la o etapă de traducere a standardelor internaționale și adoptarea lor ca standarde române, la conlucrarea cu ISO pentru noi standarde.

Familia ISO 9000. O organizație este condusă și funcționează cu succes, dacă este coordonată și controlată în mod sistematic și transparent. Astfel, trebuie implementat și menținut un sistem de management care este proiectat pentru îmbunătățirea continuă a performanței, luând în considerare necesitățile tuturor părților interesate. Activitatea de management al unei organizații include, printre alte categorii, managementul calității. Familia ISO 9000 face distincție între cerințele pentru sistemele de management al calității și cerințele pentru produse.

Pentru ca organizațiile să funcționeze eficace, trebuie să identifice și să gestioneze numeroase procese corelate și care interacționează între ele. De cele mai multe ori, elementele de ieșire dintr-un proces vor constitui elementele de intrare în alt proces.

Identificarea și managementul sistematic al proceselor utilizate în cadrul unei organizații și în special interacțiunile dintre astfel de procese sunt denumite "abordare bazată pe proces", concept care face parte dintre principiile fundamentale ale sistemelor de management al calității.

Un alt principiu fundamental este dat de rolul pe care îl joacă "tehnicile statistice". Utilizarea tehnicilor statistice ajută la înțelegerea variabilității și prin aceasta organizațiile pot să rezolve probleme și să îmbunătățească eficacitatea și eficiența (eficacitatea-măsura în care sunt realizate activitățile planificate și sunt obținute rezultatele planificate; eficiența-relația între rezultatul obținut și resursele utilizate). Aceste tehnici facilitează utilizarea mai bună a datelor disponibile pentru a ajuta la luarea deciziilor.

Variabilitatea poate fi observată în desfășurarea și rezultatele mai multor activități, chiar în condiții de stabilitate aparentă. O astfel de variabilitate poate fi observată la caracteristicile măsurabile ale produselor și proceselor și poate fi întâlnită în diferite etape ale ciclului de viață a produselor: de la studiul de piață, la service-ul la client și până la scoaterea finală din uz a produsului.

Tehnicile statistice pot ajuta la **măsurarea, descrierea, analizarea, interpretarea și modelarea** unor asemenea variabilități, chiar cu un volum relativ mic de date. Analiza statistică a unor asemenea date poate duce la o mai bună înțelegere a naturii, amploarei și cauzelor variabilității, ajungând astfel la rezolvarea și chiar la prevenirea problemelor care pot rezulta dintr-o astfel de variabilitate și la promovarea îmbunătățirii continue.

Îndrumări referitoare la tehnicile statistice într-un sistem de management al calității sunt prezentate în standardul ISO/TR 100017, apărut în noiembrie 2005 și numit "Îndrumări referitoare la utilizarea tehnicilor statistice pentru ISO 9001:2000".

Acesta se prezintă ca un raport tehnic și are ca scop sprijinirea organizațiilor în identificarea tehnicilor statistice care pot fi utile în **dezvoltarea, implementarea, menținerea și îmbunătățirea** unui sistem de management al calității, în conformitate cu cerințele ISO 9001:2000. Această problemă este dificilă și a necesitat formarea unor colective interdisciplinare. Utilitatea tehnicilor statistice rezultă din **variabilitatea** care se constată atât în comportament, cât și în rezultat, pentru toate procesele, chiar dacă, aparent sunt stabile. Această variabilitate poate fi observată în caracteristicile cuantificabile ale produselor și proceselor, existând în toate etapele ciclului de viață a produselor, de la cercetarea pieței, la service pentru client și eliminarea finală.

Tehnicile statistice permit o utilizare mai bună a datelor disponibile pentru a ajuta în luarea deciziilor și, prin aceasta, la îmbunătățirea continuă a calității produselor și proceselor pentru a dobândi satisfacție clientului. Aceste tehnici sunt aplicate celor mai multe activități: cercetarea pieței, proiectarea, dezvoltarea, producția, verificarea, instalarea și service-ul.

Variabilitatea proceselor este foarte bine expusă în documentul SR ISO 8258+C1 "Fișe de control de tip shewhart" din 1999. Aceasta nu poate fi eliminată integral, așa cum propune binecunoscutul guru al calității Philip B. Crosby (1926-2001) în inițiativa sa "Mișcarea Zero Defecte", prin anii 1960-1970.

Așa numita **variabilitate inerentă** ce apare în orice activitate artificială produsă de factorul uman care, cel mult poate fi înțeleasă și controlată: "Understanding variation" (înțelegerea variabilității) este una dintre cele patru axiome cheie ale SPK (System of Profound knowledge=sistem al cunoașterii profunde).

Totuși "proiectarea unui produs este una dintre aplicațiile importante ale controlului statistic al calității. Nici un efort și nici toată statistica aplicată pentru detectarea cauzelor speciale de variație, cu scopul de a-i ajuta pe muncitori, nu va putea suplini erorile din proiectare"- Deming,W,E.

Cunoscutul calitolog japonez Kaoru Ishikava (1915-1989) atrage atenția că, deși majoritatea documentelor standardizate, ce se referă la procedurile statistice, prezintă, de regulă, metode relativ elementare de prelucrare a datelor referitoare la calitate, calitologul profesionist nu trebuie să uite că există alte numeroase metode- mai puțin simple – dar extrem de utile- cu ajutorul cărora el trebuie să-și continue investigația. Dar, se pare că nu se știe, sau s-a uitat de acest lucru, sau, în foarte multe locuri, se omit cu bună știință astfel de metode.

Proiectarea experimentelor (DOE), în accepțiunea SR ISO 10017, se referă la investigarea făcută planificat și bazată pe o evaluare statistică a rezultatelor pentru a obține concluzii la nivelul de încredere stabilit. DOE implică inducerea schimbării (schimbărilor) sistemului investigat și evaluarea statistică a efectului acestor schimbări asupra sistemului. Obiectivele sale pot **să valideze** anumite caracteristici ale unui sistem sau **să investigheze** influența unuia sau a mai multor factori asupra anumitor caracteristici ale unui sistem.

Există mai multe tehnici care se pot utiliza pentru analiza datelor experimentului: de la tehnicile analitice, cum ar fi "analiza dispersională" (ANOVA), până la cele mai multe de natură grafică, cum ar fi "diagramele de probabilitate".

DOE poate fi utilizat pentru evaluarea anumitor caracteristici ale unui produs, proces sau sistem, în scopul validării după un standard specificat sau pentru evaluarea comparativă a mai multor sisteme. DOE este îndeosebi util pentru investigarea sistemelor complexe, ale căror ieșiri pot fi influențate de către un potențial număr mare de factori. Obiectivul experimentului poate fi să maximizeze sau să optimizeze o caracteristică de interes sau să reducă variabilitatea acesteia. DOE poate fi folosit să identifice cei mai influenți factori dintr-un sistem, dimensiunea influenței acestora și relațiile (de exemplu, interacțiunile), dacă există, dintre factori. Constatările pot fi utilizate să ușureze proiectarea și dezvoltarea unui produs sau proces, să controleze sau să îmbunătățească un sistem existent.

Metoda clasică a planurilor de experiențe ia în considerare numai **valorile medii** ale caracteristicilor care trebuie optimizate, fiind completată uneori printr-o analiză a variației diferiților factori testați.

Metoda Taguchi, după numele doctorului japonez Genichi Taguchi, este o aplicație particulară a tehnicii planurilor de experiențe, care tratează concomitent **media și variabilitatea valorilor** caracteristicilor măsurate, utilizând drept indicatori de performanță raporturile Semnal/Zgomot. Acestea țin cont de:

- valoarea dorită (semnalul), de atins;
- variabilitatea nedorită a acestei valori (zgomotul), de combătut.

Utilizarea acestui indicator de performanță permite găsirea rapidă a combinației nivelurilor factorilor controlați, care se dovedesc cel mai puțin sensibili la factorii de zgomot. Pe de altă parte, forma rapoartelor Semnal/Zgomot permite evaluarea directă a costurilor calității (conceptul **funcției pierdere a calității** emis de G. Taguchi). El definește calitatea ca o caracteristică care evită pierderile de bani nu numai pentru fabricant, în timpul producției, și pentru utilizator, cât și, la nivel global, pentru societate, în sensul comunității umane, luate în ansamblu.

Funcția pierdere a calității exprimată de G. Taguchi permite cuantificarea, sub formă de pierderi financiare, a consecințelor pentru producător și pentru clienții săi a nivelului calității unui produs.

Un plan de experiențe reprezintă o serie de încercări organizate înainte pentru a determina, cu un minimum de încercări și un maximum de precizie influențele posibile ale parametrilor diferiți, pentru a optimiza performanțele sistemului studiat. Aceste planuri au fost dezvoltate la începutul secolului al XX lea de către englezul Roland A. Fisher și de francezul Jacques Hadamard. Tehnicile lor au pătruns relativ puțin în domeniul industrial datorită caracterului prea teoretic și a complexității de implementare. Una dintre contribuțiile cele mai remarcabile ale lui G. Taguchi este că a ușurat folosirea tehnicilor planurilor de experiențe, propunând o colecție de planuri standard care sunt asociate dispozitivelor practice, permițând o adaptare rapidă a acestora și fără a se înșela asupra unei necesități reale.

Funcția pierdere a calității, în cazul criteriilor țintă, se exprimă astfel:

$$L(y) = k(y - y_N)^2,$$

în care :

- $L(y)$ - valoarea pierderii unitare, exprimate în unități monetare;
- y - valoarea caracteristicii măsurate;
- y_N - valoarea nominală, adică valoarea țintă;
- k - constantă a cărei valoare depinde de cazul tratat.

Unicul rol al constantei k este cuantificarea pierderii în unități monetare (euro, dolari etc.). Astfel, dacă este cazul unei dimensiuni critice a unui dispozitiv de securitate a unui reactor nuclear, valoarea constantei k va atinge o cifră foarte mare.

Prin intermediul acestei funcții G. Taguchi materializează ideea că pierderea este o funcție continuă a abaterii în raport cu valoarea țintă, și că această pierdere nu apare subit la trecerea unei limite de toleranțe. Unul dintre atuurile industriei nipone este că, firmele sunt tot mai interesate să respecte valorile fixate și să reducă progresiv dispersiile. De aceea, clienții constată că produsele obținute sunt mai fiabile deci, mai sigure. Drumul de urmat este stabilirea valorii țintă și diminuarea dispersiei pentru îmbunătățirea calității, reducând costurile. Funcția pierdere a calității permite cuantificarea unei singure piese sau a unui singur produs dat, dar, de cele mai multe ori se dorește evaluarea mediei calității unui lot sau a unui eșantion de produse:

a) pentru o singură piesă

$$L(y) = k(y - y_N)^2 ;$$

b) pierderea medie unitară pentru n piese :

$$L(y) = k[\text{media}(y_i - y_N)^2],$$

unde y_i reprezintă valorile y_1, y_2, \dots, y_n .

Raportul Semnal/Zgomot, în acest caz, este:

$$S/Z = 10 \log [\bar{y}^2 / s^2 - 1/n] \text{ [db]} .$$

Alte două cazuri tratate de Taguchi sunt:

- funcția pierdere a calității în cazul criteriilor care trebuie să fie minimizezate și de asemenea raportul Semnal/Zgomot:

a) pentru un lot de produse:

$$L(y) = k(s^2 + \bar{y}^2) \quad (\text{pierdere unitară medie}) ;$$

b) pentru un singur produs:

$$L(y) = k y^2 \quad \text{și}$$

$$S/Z = -10 \log (s^2 + \bar{y}^2) \text{ [db];}$$

- funcția pierdere a calității pentru un criteriu care trebuie maximizat:

a) pentru un produs:

$$L(y) = \frac{1}{y^2};$$

b) pentru un lot de n produse :

$$L(y) = k \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2};$$

$$S/Z = -10 \log (1/\bar{y}^2) (1 + 3 s^2/\bar{y}^2) \text{ [db].}$$

Metoda planurilor de experiențe elimină tatonările succesive, încercând un singur factor o dată. Nu putem înțelege puterea inovatoare a planurilor de experiențe aplicate după metoda Taguchi, dacă neglijăm componenta lor socio-organizațională. Această metodă se adresează unui număr cât mai mare de participanți, trăgându-se concluzii din observațiile răzlețe, care în lipsa unei interpretări teoretice, sunt considerate în cel mai bun caz remarce fără fundamentare, contribuind astfel la remedierea greșelilor unui management tradițional: incapacitatea sa de a integra metodic cunoștințele rezultate din experiența colectivă.

Bibliografie

- [1] Alexis, J., *Metoda Taguchi în practica industrială*, Ed. Tehnică, București, 1999.
- [2] Deming, M., *Journal of the American Statistical Association*, vol. 68, nr.341.
- [3] Isaic - Maniu, Al. (coordonator), *Dicționar de statistică generală*, Ed. Economică, București, 2003.
- [4] Vodă, V. Gh., *Probleme speciale în analiza calității*, Rev. Calitatea, nr.3, sept. 2005.

ÎNVĂȚAREA PRIN PROIECTE: O STRATEGIE DE PREGĂTIRE A VIITORILOR PROFESORI

Mihaela SINGER

Institutul de Științe ale Educației
București

Cristian VOICA

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

LEARNING THROUGH PROJECTS: A STRATEGY TO TRAIN PROSPECTIVE TEACHERS

Abstract. As historical and psychological research shows, a change of paradigm at a professional community level is a difficult process. Young teachers that are trained in a traditional system tend to follow the same "models" they meet during the school years. We started our study from the following question: What types of tasks are more appropriate to change the teaching paradigm from an information based approach to a learner centered approach? We hypothesized that putting the student to assume new roles: member in a team, project manager, pupil/teacher, we can generate in student self-directed and active learning. In order to check this hypothesis, we asked the students to develop short research projects. The topics of the projects have been discussed during the semester with each group. The distribution of topics has been mostly randomly made considering the students' preference for working with a certain school age population and/ or considering the informal possibility to have access in a school. The students of each group conducted the irrelative study, presented it for the colleagues in the class, summarized it, and submitted the summary as part of a portfolio.

1. Introducere

1.1. O scurtă prezentare

Școala românească tradițională are ca principal scop transmiterea de cunoștințe. Conform acestei paradigme, este larg răspândită opinia că un student cu rezultate bune în Facultate este un viitor bun profesor. Un studiu din 2004 arată că "o astfel de regulă educațională conduce la performanțe ale elitelor, dar generează serioase probleme în educația de masă. Într-un astfel de sistem, profesorii devin mediatori pasivi între informațiile conținute de manualele școlare și elevi". ([5]). Un alt raport, care evaluează impactul noului curriculum, notează că majoritatea profesorilor cred că "un bun profesor are calități intrinseci, care nu au neapărat consecințe asupra rezultatelor învățării" ([6]). Aceeași percepție par să o aibă și studenții; participanții la acest studiu au caracterizat activitatea profesorului "bun" și activitatea elevului "bun" prin următoarele cuvinte – cheie.

<i>Activitatea profesorului „bun” (cuvinte-cheie)</i>	<i>Activitatea elevului „bun” (cuvinte-cheie)</i>
<ul style="list-style-type: none">- predă- exemplifică- evaluează	<ul style="list-style-type: none">- învață- știe- rezolvă

Spre deosebire de alte țări, în România nu există o formare diferențiată pentru viitorii profesori; un student care urmează facultatea de matematică, de exemplu, are opțiunea unor cursuri facultative de psihologie, pedagogie și didactică, pentru a deveni profesor.

1.2. Câteva întrebări de start

Am pornit studiul nostru de la următoarele întrebări:

- Cum pot fi influențați studenții – viitori profesori de matematică – să schimbe paradigma de predare, de la una centrată pe profesor și pe furnizarea de informație, la paradigma învățării centrate pe elev?

- Ce sarcini de lucru ar putea schimba imaginea studentului asupra viitoarei lui profesii?

O schimbare de paradigmă la nivelul unei comunități profesionale este un proces dificil (vezi, de exemplu: [3], [2]). Tinerii profesori, formați într-un sistem tradițional, tind să utilizeze "modelele" întâlnite în timpul școlii. Chiar dacă studenții apreciază (cel puțin la modul declarativ) acei profesori care utilizează metode de învățare activă, atunci când sunt ei înșiși puși în situația să își asume rolul de profesor, tendința lor este să transmită doar cunoștințe, într-un demers centrat pe profesor.

Ipoteza noastră de start a fost că *putem genera învățare activă și schimbare de paradigmă privind predarea matematicii, punând studenții să își asume noi roluri, și anume: membru al unei echipe, manager de proiect, student/profesor*. Pentru a asigura succesul unei astfel de încercări, profesorii universitari ar trebui însă să joace rolul de "profesor – ghid" ([1]). În loc să explice, să demonstreze și să corecteze, ei ar trebui să "ghideze studenții în cadrul unui proces de învățare activă" ([4]).

Lucrarea de față se bazează pe o analiză a interacțiunilor profesor-student în cadrul cursului de Didactica Matematicii ținut de către unul din autori la Facultatea de Matematică și Informatică din București.

2. Metodologia folosită

2.1. Participanții la studiu

Studiul a fost făcut pe 51 de studenți (38 studente și 13 studenți) din anul al III-lea de la Facultatea de Matematică și Informatică din București, în cadrul cursului de Didactica Matematicii. Acesta a avut loc în semestrul al cincilea, câte trei ore (curs și seminar) pe săptămână. La momentul desfășurării studiului, studenții participanți parcuseseră deja cursuri de Psihologie școlară și de Pedagogie și urmau să efectueze Practica pedagogică și să parcurgă un curs de Didactica Informaticii.

2.2. Sarcini de lucru

Pe parcursul semestrului, studenții au avut de rezolvat două sarcini de lucru, de scurtă durată și de lungă durată, diferențiate în funcție de perioada de timp necesară finalizării acestora. Sarcinile de lucru au fost rezolvate mai ales în grup; pentru aceasta, au fost formate 11 grupuri de lucru de 4-6 studenți încă de la începutul semestrului.

• **Sarcinile de scurtă durată** au constat în planificarea și desfășurarea unor activități de rezolvare de probleme, în care unul sau doi studenți și-au asumat rolul de profesor(i), iar ceilalți studenți și-au asumat rolul de elevi. Problemele au urmat o tematică anunțată dinainte și au fost pregătite în grup. Aceste activități s-au desfășurat pe perioada întregului semestru. Prezentările au fost urmate de discuții, centrate pe întrebările: *Ce a fost bine/ rău? Ce aș fi făcut altfel? Ce am învățat din această experiență?*

• **Sarcinile de lungă durată** au constat în realizarea unor mici proiecte de cercetare. Studenții au fost instruiți cum să conceapă un chestionar sau un interviu, cum să aplice aceste instrumente, cum pot prelucra datele pentru a obține concluzii relevante. Temele proiectelor au fost stabilite de la început de comun acord cu profesorul și au fost discutate pe parcursul semestrului cu fiecare grup în parte. În distribuirea temelor de proiecte, profesorul a ținut cont de preferințele sau posibilitățile studenților de a lucra cu anumite grupe de vârstă. (Deoarece Universitatea nu are școli-pilot, studenții au discutat despre posibilitățile lor de acces în diverse școli sau licee din țară.) Fiecare grup a desfășurat proiectul, l-a prezentat colegilor în cadrul unor ore speciale de seminar de la sfârșitul semestrului și a concretizat rezultatele obținute ca parte a unui portofoliu. Portofoliul a inclus, de asemenea, rapoarte asupra modului de organizare, descrierea modului în care au fost pregătite activitățile de grup și câte un eseu auto-reflexiv al fiecărui student.

2.3. Modul de colectare a datelor

Datele prelucrate pentru lucrarea de față au fost obținute din următoarele surse:

- chestionare adresate studenților (la mijlocul și la sfârșitul semestrului);
- eseurile auto-reflexive, cuprinse în portofolii;
- interviuri.

Intrebările din chestionare și interviuri i-au încurajat pe studenți să explice în detaliu procesele de predare și de învățare la care au participat. Pentru a avea informații mai detaliate, am înregistrat video prezentarea proiectelor.

2.4. Exemple

Sarcinile de scurtă durată au fost centrate pe activități de rezolvare a unor probleme. Ele au avut totodată o dimensiune didactică. Un exemplu de acest tip este următorul.

Se știe că mijloacele laturilor unui patrulater determină un paralelogram. Proiectați o activitate de învățare în care utilizați diferite materiale didactice pentru a formula și demonstra analogul în spațiu al acestei probleme.

Temele de proiecte de cercetare propuse grupelor de studenți pot fi clasificate în următoarele categorii:

- a) modul în care elevii înțeleg concepte precum: infinit/ infinitate, cardinal echivalență, densitatea mulțimilor de numere, procesele recursive, relații/ aplicații/ funcții;
- b) modul în care elevii își construiesc reprezentări multiple ale unor concepte precum: ecuație, șir;
- c) modul în care elevii din preuniversitar își reprezintă soluția unei probleme date;
- d) înțelegerea diferențelor de percepție asupra schimbărilor monetare.

Tratarea exhaustivă a acestor teme ar fi fost foarte dificilă. Proiectele au fost folosite însă ca oportunitate pentru viitorii profesori să intre în contact cu elevi de diverse vârste și să înțeleagă faptul că aceștia pot avea abordări diverse în rezolvarea problemelor și percepții diferite asupra unor concepte matematice.

3. Influența sarcinilor de lucru asupra cunoștințelor matematice și pedagogice ale studenților

Ambele tipuri de sarcini au avut ca scop dezvoltarea la studenți a unor reprezentări realiste asupra viitoarei meserii de profesor. Am utilizat instrumentele de colectare a

datelor, prezentate anterior, pentru a determina în ce măsură acest deziderat a fost atins.

Analiza chestionarelor a relevat că acest tip de sarcini de lucru determină o schimbare de percepție privind profesorul-model asumat de studenți.

Iulia: După cursul de Didactică, părerea mea despre modelul de profesor s-a schimbat foarte mult. Ceea ce numesc acum profesor model nu se poate asocia, din păcate, cu niciunul dintre profesorii mei din liceu sau din anul I.

Comentariile studenților arată de asemenea că, în urma desfășurării acestor sarcini de lucru, ei au tendința să își schimbe percepția asupra meseriei de profesor:

Dana: Pierdută în calcule, formule, teoreme și în agitația facultății, uitasem de ce, la un anumit moment din viață, am decis că vreau să devin profesoară. Cursul de Didactică m-a făcut să înțeleg mai bine oamenii și matematica. Ciudat! Pentru că nu mă așteptam că un simplu curs mă va face să îmi doresc din nou să devin profesoară.

Ilinca: Discutând cu diferiți copii, am realizat că un profesor trebuie nu doar să cunoască materia, dar să și aibă atracție pentru elevi, să îi facă să răspundă propriilor lor întrebări.

Atunci când s-au referit la sarcinile de scurtă durată, studenții au remarcat că un profesor trebuie să cunoască bine materia dar, în același timp, trebuie să cunoască și tehnici de predare:

Elena: (...) Am înțeles că, chiar dacă tu știi soluția problemei, nu e ușor să propui problema spre rezolvare elevilor; ca să faci asta cu succes, trebuie să mai știi și metode de predare.

Sarcinile de lucru propuse par să faciliteze și gândirea critică a studenților relativ la predare:

Cătălina: Am înțeles că elevii trebuie să fie ajutați să găsească soluția unei probleme, fără să le oferi prea multe detalii. Dacă doar le-aș arăta soluția mea, nu cred că ar înțelege-o prea bine!

Simona: Chiar dacă grupul nostru nu a funcționat perfect, am învățat să mă analizez pe mine și pe cei din jur.

Analiza eseurilor a arătat că sarcinile de lucru propuse studenților are un impact puternic asupra acestora:

Elena: Am învățat că un profesor trebuie să țină seama de faptul că elevii au modalități diferite de gândire și înțelegere. Am descoperit (din păcate, abia acum, la Universitate), că lucrul în grup este un mod plăcut și eficient de rezolvare a problemelor.

Studenții par de asemenea să analizeze activitățile desfășurate și din perspectiva viitoarei lor profesii:

Simona: Consider activitățile desfășurate foarte utile. După această experiență, pot să spun că voi lucra în același mod cu elevii mei. Este în același timp plăcut și util să lucrezi și să gândești la o temă dată (...)

4. Concluzii

Privitor la modul în care profesorul (unul dintre autori) a organizat activitățile, o largă majoritate a studenților (43 din 51) a apreciat că *instrucțiunile și explicațiile au dat o direcție generală de rezolvare a sarcinilor de lucru, lăsând participanților libertatea să se organizeze singuri*. Sarcinile propuse au potențialul să schimbe percepția studenților asupra viitoarei profesii și să determine progresul în evaluarea calităților unui profesor. Pe de altă parte, caracterul interactiv a generat învățare în ambele direcții; achizițiile studenților au generat feed-back rapid și eficient, ceea ce a permis profesorului reformularea unor sarcini de lucru.

Bibliografie

- [1] Crawford, B.A., *Embracing the essence of inquiry: New roles for science teachers*, Journal of Research in Science Teaching **37** (2000) (9), pp. 916–937.
- [2] Gardner, H., *Changing minds*, Cambridge, MA: Harvard Business School Press, 2005.
- [3] Kuhn, T.S., *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago: The University of Chicago Press, 1970.
- [4] Lunenberg, M.L., Volman, M., *Active learning: Views and actions of students and teachers in basic education*, Teaching and Teacher Education, **15** (1999) (4), pp. 431–445.
- [5] Singer, F.M.; Voica, C., *Challenging the future: Mathematical Education in Romania between Ideals and Reality*, Ed. Cub Press, 2004.
- [6] Vlasceanu, L. (coord.), *The school at crossroads – Change and Continuity in the Curriculum for Compulsory Education. The impact study concerning the Implementation of the National Curriculum* (in Romanian), Ed. Polirom, Iași, 2002.

PREDAREA ALGEBREI LINIARE PENTRU STUDENȚII LA INFORMATICĂ

Mihai Sorin STUPARIU

Cristian VOICA

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

TEACHING LINEAR ALGEBRA TO STUDENTS IN INFORMATICS

Abstract. The purpose of the paper is to examine the tasks used in teaching Linear Algebra for the students from the Informatics field. The starting point of our study was the remark that the interest of our students for algebraic concepts depends on the application of these concepts in informatics. We present several tasks used in our courses, delivered at the Faculty of Mathematics and Informatics in Bucharest.

1.Introducere

În ultimii ani, în învățământul românesc, problema motivației pentru învățare a devenit tot mai acută. Atât profesorii de gimnaziu sau de liceu, cât și cei din mediul universitar, acuză slaba motivație pentru învățare a elevilor sau studenților lor. În aceste condiții, este necesar ca factorii educaționali să găsească soluții realiste pentru depășirea acestei situații.

În studiul de față, am pornit de la următoarea premiză: *elevii/ studenții asimilează mai bine ceea ce îi interesează și pot folosi în aplicații imediate*. De aceea, este nevoie de o altă viziune asupra „cursurilor fundamentale” de matematică, în particular pentru acelea adresate studenților cu specializarea informatică.

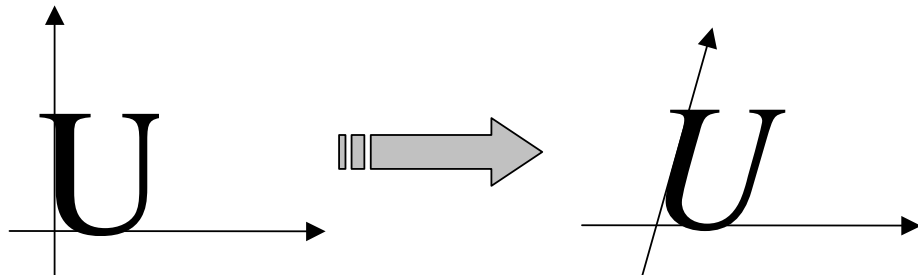
Autorii acestui studiu au fost puși în situația de a preda algebra liniară, ca parte a cursurilor de Algebră, respectiv de Geometrie Analitică, la secțiile de Matematică-Informatică și de Informatică de la Universitatea din București. De aceea, întrebările de start ale studiului au fost:

- Ce tipuri de sarcini de lucru sunt adecvate pentru studenții de la secțiile de matematică-informatică sau de informatică, în cadrul cursurilor/ seminariilor de Algebră și de Geometrie?
- Cum putem proceda, ca profesori, astfel încât programa școlară să fie parcursă și, în același timp, studenții să fie mai motivați?
- Ce tipuri complementare de activități pot fi propuse studenților pentru o mai bună înțelegere și aprofundare a materiei?

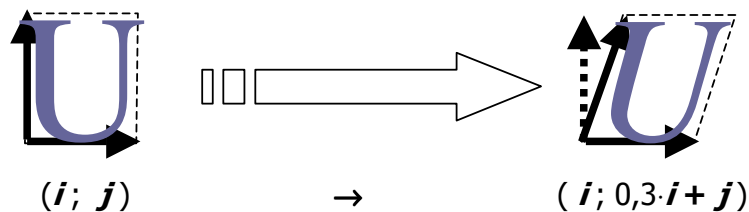
În literatura de specialitate, există diverse studii privind predarea/ învățarea algebrei liniare sau a geometriei analitice (de exemplu, lucrările [1] - [7], citate la bibliografie). În niciunul din aceste studii nu am găsit însă referiri la predarea algebrei liniare sau a geometriei analitice pentru studenți cu anumite interese sau abilități, de exemplu pentru studenții interesați mai ales de informatică.

2. În loc de motivație...

Multe dintre „operațiile” uzuale, pe care le folosim atunci când lucrăm la calculator, pot fi re-interpretate din perspectiva algebrei liniare. Evidențierea lor în cadrul cursurilor de Algebră sau de Geometrie Analitică poate fi utilă pentru înțelegerea unor concepte diverse. Să considerăm, de exemplu, schimbarea formatului de literă, mai precis trecerea de la formatul „drept” la formatul „italic”.



Pentru un geometru sau un algebrist, aceasta este o **transformare afină**, respectiv o **aplicație liniară**; aceste transformări pot fi exprimate astfel:



3. Metodologie

Grupurile – țintă ale studiului au fost trei serii de studenți din anul I și II, din domeniile de licență Informatică sau Matematică-Informatică de la Facultatea de Matematică și Informatică de la Universitatea din București. În total, la acest studiu au participat aproximativ 180 de studenți.

Datele pentru acest studiu au fost colectate prin chestionare adresate studenților, precum și prin compararea cu serii-martor, la care nu a fost aplicat acest stil de lucru.

4. Desfășurarea studiului

În cadrul studiului, au fost propuse studenților diferite sarcini de lucru.

4.1. Sarcini de tip calculatoriu

Aceste sarcini de lucru au cerut transpunerea în programe informatice a unor algoritmi, prezența și demonstrați la curs. De exemplu, am solicitat studenților să realizeze programe informatice, într-un limbaj ales de ei, pentru următoarele probleme.

- Să se treacă de la reprezentarea parametrică la reprezentarea implicită a unui subspațiu, și invers;
- Să se decidă liniar independența unor vectori; în caz afirmativ, să se completeze sistemul de vectori la o bază;
- Să se determine baze pentru nucleul și imaginea unei aplicații liniare, descrisă prin matricea asociată în bazele canonice;
- Să se compună două permutări; să se descompună o permutare dată ca produs de cicli disjunși; să se descompună o permutare dată ca produs de transpoziții;
- Să se decidă dacă două subspații vectoriale sunt complementare.

4.2. Sarcini de lucru vizând reprezentări grafice

Aceste sarcini de lucru au vizat utilizarea transformărilor geometrice în realizarea unor programe de grafică pe calculator. De exemplu, am solicitat studenților să realizeze programe prin care vizualizează rezolvări ale următoarelor probleme.

- Se dau patru puncte în plan. Să se traseze acoperirea convexă și poligonul/poligoanele determinate de ele.
- Se dau coeficienții unei conice. Să se decidă dacă aceasta este o elipsă și, în caz afirmativ, să se deseneze.
- Se dau trei puncte în \mathbf{R}^3 . Să se deseneze proiecțiile lor pe un plan dat.

4.3. Mecanisme de interacțiune

Pentru rezolvarea sarcinilor de lucru, studenții au putut folosi orice limbaj de programare. Ulterior, am verificat programul, introducând date arbitrare și verificând prin calcul rezultatele obținute.

Proiectele au fost realizate, de regulă, în grupe de 2-3 studenți. În acest fel, au fost valorizate competențe diferite (de matematică, respectiv de informatică) ale participanților la studiu. Temele și termenele au fost anunțate la curs, iar verificarea programelor realizate s-a făcut în unul dintre laboratoarele Facultății. În timpul verificării, studenții au fost obligați să explice rezultatele teoretice folosite în realizarea programelor.

Aceste programe au contat ca bonus, în limita a 15% din nota finală.

5. Comentarii ale studenților

La realizarea acestor proiecte au participat 141 de studenți (cca. 75% din total). Opinia studenților, exprimată în chestionarele aplicate la sfârșitul cursurilor a fost extrem de favorabilă; mai mult, unii studenți și-au exprimat dorința realizării unui al doilea proiect. Câteva comentarii ale studenților sunt prezentate în continuare.

Prin proiecte am reușit să înțelegem partea practică a geometriei.

Proiectul a fost util atât pentru cunoștințele noastre matematice, cât și pentru cele informatice.

Proiectele sunt cele mai îndrăgite de noi.

În chestionare, studenții au făcut și diverse sugestii pentru o mai bună organizare a unor astfel de activități în viitor. De exemplu, ei consideră utilă prezentarea fiecărui proiect și discutarea programului realizat în fața colegilor de grupă.

6. Utilitatea acestor activități

Din perspectiva studenților participanți, utilitatea proiectelor este evidențiată de comentariile de mai sus. Din perspectiva autorilor studiului, ca profesori, considerăm că acest tip de proiecte este util, deoarece:

- determină o mai bună înțelegere a temelor predate la curs: pentru pregătirea unui astfel de proiect trebuie citită și înțeleasă o mare parte a materiei predate;
- se realizează conexiuni între geometrie, algebră și informatică, precum și aplicații ale acestora (grafica pe calculator); studenții au apreciat faptul că au fost puși în situația de a face trecerea de la o gândire matematică, teoretică, la aplicații practice;
- este stimulată învățarea prin descoperire;
- studenții sunt puși în situația de a învăța și de a se familiariza cu materia predata încă din timpul semestrului;
- este cultivat spiritul de echipă.

Se remarcă, de asemenea, un interes crescut al studenților, manifestat prin prezența crescută la cursuri și la seminarii și prin numărul mare de programe primite. În plus, am remarcat existența unor rezultate mai bune, comparativ cu seriile –martor, la care nu au fost aplicate aceste metode. (Din păcate, nu putem absolutiza această concluzie, deoarece seriile - martor au avut alți profesori.)

7. Concluzii

În [5], Hillel identifică existența a trei limbaje în predarea algebrei liniare, care constau în moduri diferite de descriere și reprezentare a conceptelor. Aceste limbaje coexistă, dar în mod cert un sunt echivalente. Aceste limbaje sunt:

1. Limbajul *abstract* - reprezintă utilizarea aceluși limbaj formalizat, teoretic, prin care conceptele și teoria sunt formalizate. De regulă, în acest limbaj sunt exprimate noțiunile de spațiu vectorial, subspațiu, sistem de generatori, aplicație liniară, nucleu etc.
2. Limbajul *algebraic (numeric)* – presupune prezentarea conceptelor în cadrul specific al spațiului \mathbf{R}^n . În acest limbaj sunt prezentate de regulă noțiunile de rang, matrice, subspațiu.
3. Limbajul *geometric* – presupune prezentarea conceptelor în contextul geometric, al vectorilor din plan sau din spațiu. În acest limbaj sunt prezentate de regulă noțiunile de segment, punct, dreaptă, plan, transformare geometrică.

În urma desfășurării studiului, am ajuns la formularea unei noi ipoteze: în învățarea algebrei liniare este util și un al patrulea limbaj, și anume *limbajul informatic*. Acesta presupune prezentarea conceptelor de algebră liniară ca parte a unor programe de calculator. Credem că limbajul informatic este complementar celor trei limbaje menționate.

Ne propunem ca, prin cercetări aflate în desfășurare, să determinăm legăturile între limbajul informatic și celelalte tipuri de limbaje, menționate mai sus.

Bibliografie

- [1] Chartier, G., *Using "Geometrical intuition" to learn Linear Algebra*, ERME II, WG 7, 2002
- [2] Dorier, J.-L., *Teaching Linear Algebra at University*, ICM 2002, vol. III, 1-3, arXiv: math. HO/0305018 v1, 1 May 2003.
- [3] Gueudet- Chartier, G., *Should we teach Linear Algebra through geometry?*, Linear Algebra and Its Applications, 379 (2004), 491- 501.
- [4] Harel, G., *Principals of learning and teaching mathematics, with particular reference to the learning and teaching of Linear Algebra: old and new observations*, In: J.L.Dorier (ed.), *On the teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, 177-189.
- [5] Hillel, J., *Models of description and the Problem of representation in Linear Algebra*, in J. L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, 191-207.
- [6] Uhlig, F., *The role of proof in comprehending and teaching elementary Linear Algebra*, Educational Studies in Mathematics 50, 3(2002), 335-346.
- [7] Uhlig, F., *A new unified, balanced and conceptual approach to teaching Linear Algebra*, Linear Algebra and its Applications, 361 (2003), 147-159.

GOANA DUPĂ RADICALI

Mariana VLADU

*Grupul Școlar Industrial Construcții de Mașini Colibași
Mioveni, Argeș*

THE CHASE OF RADICALS

Abstract. The paper presents some significant aspects concerning the history of discovering the radicals and their use in solving polynomial equations.

“Matematica superioară, desigur înseamnă pur și simplu acele ramuri ale acestei științe care nu au găsit încă un câmp larg de aplicare și deci nu au ieșit din absurditate” spunea Thorton Fry în 1941.

În urmă cu 20-30 de ani existau unele domenii ale matematicii care păreau intangibile la presiunea unor necesități practice; în același timp ramuri ale matematicii ca teoria probabilităților sau statistica matematică, născute efectiv din practică, au devenit foarte teoretizate. Alături de matematica superioară există un important corp de cunoștințe ce formează matematica elementară în care ecuațiile algebrice ocupă un loc însemnat.

De-a lungul timpului s-a constatat o adevărată goană după radicali căutându-se diferite formule cu radicali pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1)$$

cu $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbf{Z}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Ele apăreau în diverse probleme de geometrie, mecanică, astronomie.

În papirusul Rhind al scribului Ahmes din anul 2000 î.c. păstrat la British Museum din Londra și în papirusul din anul 2200 î.c. păstrat la Muzeul Artelor din Moscova există printre cele 110 probleme de matematică și unele care conduc la ecuații de gradul I.

De exemplu în papirusul lui Rhind apare ecuația

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

Babilonienii au acordat o mai mare atenție ecuațiilor. Ei aproximau destul de bine rădăcina pătrată din diferite numere. De exemplu

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{25}{60}, \quad \sqrt{3} \cong 1 + \frac{45}{60}.$$

Ei întocmiseră diverse tabele care îi ajutau la rezolvarea unor ecuații de diferite ordine. De exemplu una din probleme conducea la ecuația

$$x + \frac{1}{x} = a$$

cu soluția

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}.$$

Toate problemele erau formulate în cuvinte și rezultatele lor erau date fără explicații.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$, babilonienii introduceau o necunoscută auxiliară z , ei notau $x = z + \frac{a}{2}$ de unde rezultă $y = \frac{a}{2} - z$, deci

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = b.$$

Babilonienii s-au mai întâlnit și cu probleme care duceau la ecuații de grad mai mare. De exemplu, ei încercau să rezolve ecuații de forma $x^3 + x^2 = a$. În lipsa unor formule de rezolvare, babilonienii au alcătuit tabele pentru a-l aproxima pe x .

Grecii antici au pus bazele axiomatiche ale geometriei sintetice, au studiat corpuri de rotație, secțiuni conice, au prefigurat elemente ale analizei matematice și au descoperit incomensurabilitatea, adică imposibilitatea de a exprima raportul a două segmente oarecare printr-un raport de numere întregi.

Pentru a evita aceste situații neplăcute care apăreau în probleme ei au dezvoltat o *algebră geometrică* care utiliza rapoarte geometrice, arii pentru exprimarea rapoartelor generale între mărimile aritmetice.

Algebra geometrică ajută la rezolvarea ecuațiilor de gradul II de forma: $ax + x^2 = b$. Pe un segment $AB = a$, se construiește un dreptunghi $ABHJ$ cu suprafața ax , egal cu un pătrat de arie b^2 , în așa fel încât partea în plus a ariei față de dreptunghi să fie un pătrat $AEFJ$ ($FM = BC$ și $CE = DA$). Din construcție $CD = b$, $CA = \frac{a}{2}$, $AD = AL = \frac{a}{2} + x$. Aplicând

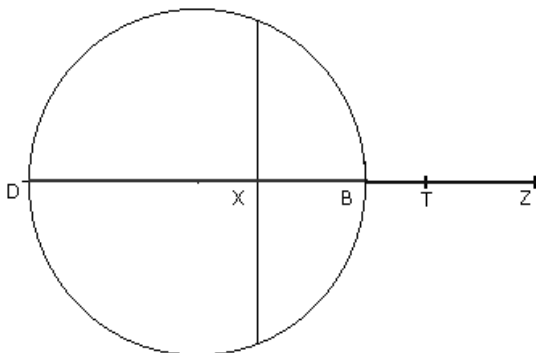
teorema lui Pitagora în triunghiul ACD obținem $b^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = ax + x^2$.

Deci latura pătratului $AEFJ$ este soluția căutată.

Mai târziu *Arhimede* (287-212 î.c.), unul dintre cei mai mari oameni de știință ai antichității, a formulat o problemă care conducea la o ecuație de gradul III: să se taie o sferă în două porțiuni, astfel încât volumele segmentelor sferice obținute să se găsească

într-un raport dat $\frac{m}{n}$, unde $m > n$. Arhimede ajunge în final la ecuația $x^3 + b^2c = ax^2$,

unde x reprezintă înălțimea segmentului sferic mai mare iar a, b, c , reprezintă cantitățile $3R, 2R, \frac{mR}{m+n}$. Arhimede rezolvă problema, reformulând-o în felul următor:



Fiind date două drepte BD și BZ , cu $BD = 2BZ$, și un punct T pe BZ , să se împartă BD printr-un punct X , astfel ca: $\frac{BD^2}{DX^2} = \frac{XZ}{TZ}$.

Arhimede aplică următorul raționament: *soluția ecuației se obține prin intersecția a două secțiuni conice și anume parabola simetrică față de axa ordonatelor, de ecuație $\frac{2}{3}by = x^2$ și hiperbola echilaterală de ecuație*

$$(a - x)y = \frac{3bc}{2}.$$

În plus, Arhimede a făcut și discuția acestei probleme: soluția ecuației există dacă punctul T se află cuprins între B și Z .

Diofant din Alexandria (secolul III), în lucrarea sa *Aritmetica* introduce prima încercare sistematică de folosire a unei notații algebrice consecvente. El se consacră în mod deosebit studiului ecuațiilor, diofantice – cum le numim noi astăzi, adică a ecuațiilor nedefinite cu două necunoscute și de diferite ordine. Astfel, în rezolvarea ecuației $2x^2 + 7 = y^2$, înțelegem automat că se caută numai soluții întregi; Diofant admitea însă ca soluții orice numere raționale pozitive.

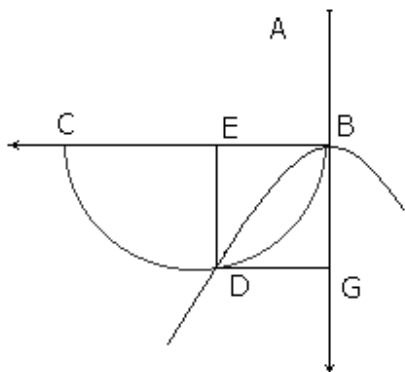
În ceea ce privește ecuațiile cu o singură necunoscută, Diofant consideră doar o singură ecuație de gradul III și anume ecuația $x^3 + 3x - 3x^2 - 4 = x^2 + 2x$, care nu prezintă prea mare interes pentru că se rezolvă cu o simplă descompunere în factori: $x^3 + x = 4x^2 + 4$ sau $x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$.

În China antică matematicienii s-au ocupat în mod deosebit de rezolvarea ecuațiilor algebrice. Ei inventează o metodă rapidă de extragere a rădăcinilor de diferite ordine, metodă pe care au aplicat-o și la rezolvarea ecuațiilor. Ei rezolvau curent ecuații de gradul I și II, precum și ecuații binome de gradul III, și reușiseră să inventeze substituțiile pe care astăzi le cunoaștem sub numele de substituțiile lui Horner: $x = ky$ și $y = p + z$, cu ajutorul cărora se transformă în mod convenabil ecuațiile de ordin superior. Orientul arabo-persan a jucat un rol important în dezvoltarea matematicii, păstrând și transmițând mai departe cuceririle științifice ale lumii antice. Între secolele al VIII-lea și al IX-lea, centrul spiritual al orientului era Bagdadul. Califul Harun al-Rașid (cel din 1001 nopți) (786-809) înființează o bibliotecă uriașă, alt calif al-Mamun înființează un observator astronomic și Academia *Beit alHikma* (= lăcașul înțelepciunii). Rolul învățaților din țările arabe a fost deosebit, însuși termenul de algebră provine din limba arabă.

Al-Horezmi a scris o lucrare intitulată *Al kitab al-muhtasar fi hisab al-djabr va-Imukabala*, în traducere *Carte scurtă despre calculul algebrei și almucabalei*, în care apare prima dată cuvântul algebră folosit astăzi în întreaga lume. Al-Horezmi se ocupă doar de studiul ecuațiilor de gradul I și II.

În schimb Omar Khayyam (1048-1131) născut la Nașapur în vechea Persie, a elaborat o adevărată teorie despre ecuațiile de gradul III. El afirmă că ecuațiile de gradul III nu se pot rezolva în general cu ajutorul riglei și compasului. Abia în 1637 Rene Descartes (1596-1650) reafirmă din nou această idee, pe care două secole mai târziu matematicianul francez P.L. Vantzel (1814-1848) reușește să o demonstreze riguros.

Iată un exemplu de ecuație de gradul III rezolvată de Omar Khayyam cu ajutorul metodelor geometrice.



Pentru a rezolva ecuația $x^3 + p^2x = p^2q$, el se folosește de cercul de ecuație $x^2 + y^2 = qx$ și de parabola $x^2 = py$ pe care le scrie sub forma $\frac{p}{x} = \frac{x}{y}$ și

$\frac{x}{y} = \frac{y}{y-x}$ de unde $\frac{p^2}{x^2} = \frac{x}{q-x}$ sau $p^2(q-x) = x^3$ echivalentă cu ecuația inițială. În construcția geometrică dată de Khayyam $AB^2 = p^2$, iar $AB^2BC = p^2q$. În figură, sensul pozitiv al axelor este cel indicat de săgeți. Punctul D de intersecție al celor două curbe este soluția pozitivă a ecuației.

În Italia medievală (secolul al XVI-lea) descoperirile științifice erau considerate proprietate privată și erau ținute secret. În această perioadă are loc și rezolvarea prin radicali a ecuației generale de gradul III. Scipione del Ferro (1456-1562), profesor la Universitatea din Bologna, reușește să găsească regula generală de rezolvare algebrică a ecuației: $x^3 + px = q$. Ulterior, Niccolo Fontana zis Tartaglia (1500-1557) afirmă că a găsit și el soluția ecuației generale de gradul III, pentru ecuații de tipul $x^3 + px = q$. Giorolamo Cardano (1501-1576), matematician de geniu al epocii publice în lucrarea sa *Ars Magna* formulele de rezolvare ale ecuației de gradul III, descoperite de Tartaglia și del Ferro și demonstrate de el. Cardano a mai arătat cum se reduc ecuațiile cubice complete la ecuații cubice cu numai trei termeni. De asemenea, lui îi aparține prima întrebuintare a soluțiilor imaginare ale ecuațiilor pătratice, el expune și metoda de reducere a ecuației de gradul IV la rezolvarea unei ecuații de gradul III, metodă găsită de elevul său Ludovico Ferrari.

Formulele pentru rezolvarea ecuației de gradul III poartă numele lui Cardano. Fie ecuația: $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ unde $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbf{Z}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Cu ajutorul transformării $x = y - \frac{a_1}{3a_0}$ ecuația se reduce la forma $y^3 - Ay + B = 0$, cu A

și B numere raționale. Deci într-adevăr o ecuație de gradul III poate avea forma generală dată de Tartaglia, și anume $x^3 + px + q = 0$.

Căutăm o soluție $x = u + v$ pentru care are loc: $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$. Pe de altă parte are loc identitatea evidentă: $(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$. Comparând cele două relații se observă că: $p = -3uv$ și $q = -(u^3 + v^3)$ care se transformă într-un sistem

de ecuații de genul:
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$
 Așadar, având suma și produsul, ecuația de gradul

II ce dă u^3 și v^3 , este: $t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, de unde

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Aceste formule poartă numele lui Cardano.

Celelalte două rădăcini se obțin imediat din: $x_2 = \alpha^2u + \alpha v$ și $x_3 = \alpha^2v + \alpha u$, unde α și

α^2 sunt rădăcinile cubice ale unității, adică $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $\alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Goana după radicali a înregistrat deci prima bătălie victorioasă importantă: rezolvarea ecuației de gradul III.

A mai rămas ecuația de gradul IV: $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ unde $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbf{Z}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Cu ajutorul transformării $x = y - \frac{a_1}{4a_0}$, ea se reduce la forma

$y^4 + py^2 + qy + r = 0$. Astfel că se poate considera și aceasta ca formă generală.

O rezolvare elegantă a ecuației de gradul IV a dat-o celebrul matematician francez Rene Descartes (1596-1650). El a pornit de la ideea că un polinom de gradul IV poate fi scris ca un produs de două trinoame de grad II, adică

$$y^4 + py^2 + qy + r = (x^2 + ax + b)(x^2 + a_1x + b_1)$$

în care a, a_1, b, b_1 trebuie determinați. Identificând coeficienții, Descartes obține sistemul

$$\begin{cases} a + a_1 = 0 \\ b + b_1 + aa_1 = p \\ ab_1 + a_1b = q \\ bb_1 = r \text{ sau } (b_1 + b)^2 - (b_1 - b)^2 = 4r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a \\ b + b_1 = p + a^2 \Rightarrow (p + a^2)^2 - \frac{q^2}{a^2} = 4r \text{ sau} \\ b_1 - b = \frac{q}{a} \end{cases}$$

$$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0.$$

Notând $a^2 = u$ obținem ecuația de gradul III : $u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0$, care se rezolvă cu formulele lui Cardano.

Goana după radicali a continuat, până când norvegianul H. Abel (1802-1829) și italianul Ruffini (1765-1832) reușesc în final să demonstreze un fapt extrem de important: ecuațiile algebrice generale de grad mai mare sau egal cu cinci nu pot fi rezolvate prin radicali. Acesta este sfârșitul goanei după radicali. Astfel se deschide o nouă perioadă în dezvoltarea algebrei.

Bibliografie

- [1] Ion D., I., Radu, N., *Algebra*, E.D.P., București, 1991.
- [2] Radu, N., colab., *Algebra pentru perfecționarea profesorilor*, E.D.P., București, 1983.
- [3] Vodă, V. Gh., *Surprize în matematica elementară*, Ed. Albatros București 1981.

UTILIZAREA JOCURILOR DIDACTICE ÎN ÎNȚELEGEREA NUMERELOR RAȚIONALE

Consuela Luiza VOICA, Grațiela DRAGOMIR

Școala cu clasele I-VIII nr. 12, București

USING DIDACTICAL GAMES IN UNDERSTANDING RATIONAL NUMBERS

Abstract. The paper reports on an experiment involving students in grades 4-6 (10-11 to 12-13 years old). In our research, we studied the children's representations of the concept of fraction and that of rational number. We found that students can better understand rational numbers when they play didactical games. In this paper, we describe the games we used for the experimental activities.

1. Introducere

Este unanim acceptat faptul că majoritatea copiilor de vârstă școlară sunt interesați de joc. Prin joc, ei învață să respecte reguli prestabilite și își dezvoltă simțul competiției. Acest interes poate fi însă folosit cu succes și pentru învățarea unor concepte matematice.

În general, un joc presupune existența unui/ unor jucători, care se folosesc de un câmp de joc, ce respectă câteva reguli de desfășurare a jocului și au o modalitatea de stabilire a câștigătorului. În plus, un joc presupune terminarea lui într-un timp rezonabil.

Trebuie să facem, de la început, o clară distincție între joc și joacă. În timp ce jocul (în particular, jocul „didactic”) are componentele de mai sus, joaca prezintă un mare grad de improvizație, iar regulile nu sunt clare. În această lucrare, ne ocupăm doar de jocul didactic și discutăm posibilitatea aplicării acestuia la clasă, în scop educativ.

Jocul didactic are câteva avantaje indiscutabile; menționăm doar faptul că prin joc pot fi formate deprinderi de diferite tipuri (locomotorii, intelectuale, de natura etică). Mai mult, jocul poate fi utilizat în oricare moment al activității de învățare - pentru predare, ca aplicare sau pentru evaluare.

Există însă și diverse dificultăți ale utilizării jocului didactic la orele de matematică. Pe de o parte, pentru elevi, manipularea anumitor materiale în timpul activității, învățarea regulilor jocului și acceptarea înfrângerii pot fi dificile. Pe de altă parte, profesorul trebuie să aibă abilitatea păstrării unei atmosfere de lucru.

Tot ca dificultăți (de care chiar autorii acestui articol s-au lovit) semnalăm inexistența literaturii de specialitate și dificultatea identificării unor jocuri didactice, adecvate unei teme date. (O lucrare care abordează problematica jocului didactic este [1].)

Lucrarea de față prezintă câteva jocuri didactice, mare parte inventate de noi, care pot fi folosite la clasă pentru înțelegerea conceptului de număr rațional și introducerea operațiilor cu numere raționale.

baghete de dimensiuni corespunzătoare și câmpul de joc. Elevii ajung astfel în mod natural la necesitatea determinării unui numitor comun, prin potrivirea celor două baghete pe porțiunea adecvată a câmpului de joc.

În același mod se pot exercita scăderea a două fracții sau înmulțirea/ împărțirea unei fracții cu/ la un număr natural.

2.2. Jocul fracțiilor

Acest joc se desfășoară cu 3-4 parteneri.

Pentru acest joc, câmpul de joc constă în: câteva mere, tăiate în câte 2, 3, 4, 6 părți egale; o pâine rotundă (pită) tăiată în 12 părți egale; „cărți de joc” pe care sunt scrise diferite fracții.

Regula jocului este următoarea: la început, cărțile de joc sunt distribuite în mod egal jucătorilor. Se stabilește un sens de joc. Pe rând, un jucător (A) cere următorului jucător (B) o parte din „obiectele” de joc, care reprezintă o fracție echivalentă cu cea înscrisă pe unul dintre cartonașele din mâna lui. Se pot întâmpla următoarele situații:

a) Frația cerută nu poate fi alcătuită din „obiectele” solicitate (de exemplu: dacă A a cerut $\frac{6}{8}$ dintr-un măr, dar mai sunt doar două părți din mărul împărțit în patru pe masă). În acest caz, A primește un cartonaș de la B, iar B continuă jocul.

b) B alege greșit numărul de obiecte. În acest caz, el primește un cartonaș de la A, iar A continuă cu o nouă întrebare (adresată jucătorului care urmează).

c) B alege corect numărul de obiecte cerut. În acest caz, obiectele alese sunt îndepărtate de pe câmpul de joc, A pune pe masă cartonașul „licitat”, iar B continuă jocul.

Există și posibilitatea ca A să spună „pas”, caz în care jocul este continuat de B.

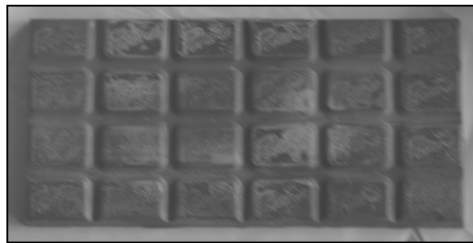
Jocul se termină atunci când unul dintre jucători și-a terminat toate cartonașele, sau când toți jucătorii au spus „pas”.

Câștigă jucătorul care are cele mai puține cartonașe (eventual, niciunul) la terminarea jocului

Variantă a jocului: pe lângă materialele de mai sus, „câmpul de joc” mai conține figuri geometrice, partiționate în părți congruente, o sticlă de 1 litru plină cu suc, pahare de 100 ml, 200 ml, 250 ml.

2. 3. Jocul ciocolatei

Jocul are doi parteneri. Pentru acest joc, câmpul de joc este format dintr-o ciocolată formată din „tablete” (ca în imaginea de mai jos). Regula jocului este următoarea: jucătorii iau pe rând un număr de tablete, care reprezintă o fracție din întreaga ciocolată, diferită de toate fracțiile „luate” anterior. Pierde jucătorul care este nevoit să ia ultima tabletă, sau cel care nu mai poate continua.



De exemplu, o posibilă desfășurare a jocului (pe „câmpul” prezentat în stânga imaginii) poate fi următoarea.

<i>Primul jucător</i>	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$... nu poate continua, deci pierde!
<i>Al doilea jucător</i>	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	

Jocul are și o următoarea variantă: De fiecare dată, numărul de tablete luate se exprimă ca fracție relativ la numărul de tablete din acel moment. De exemplu, o posibilă desfășurare a jocului (pe „câmpul” prezentat în dreapta imaginii) poate fi următoarea:

<i>Primul jucător</i>	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
<i>Al doilea jucător</i>	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$... trebuie să ia ultima tabletă, deci pierde!

2.4. Ștafeta ([2])

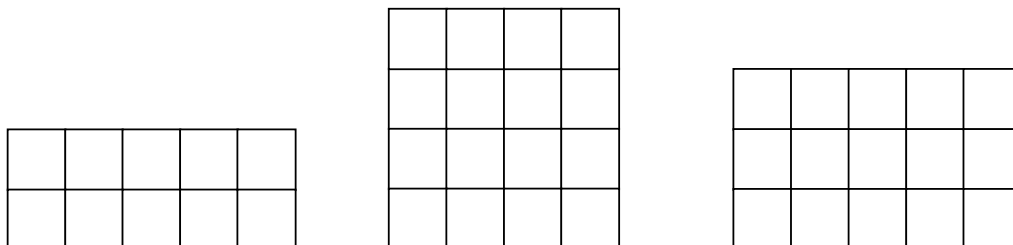
Ștafeta este un joc pentru 4-6 parteneri. Pentru „Ștafeta”, câmpul de joc constă dintr-o foaie de hârtie conținând șiruri de fracții cu același numitor, de tipul:

$$\frac{1}{100} \quad \frac{2}{100} \quad \frac{3}{100} \quad \dots \quad \frac{98}{100} \quad \frac{99}{100} \quad \frac{100}{100} \quad \frac{101}{100} \quad \frac{102}{100} \quad \dots$$

„Ștafeta” se poate juca în echipe de 4 - 6 elevi. Regula jocului este următoarea: elevii își adresează, pe rând, întrebări privind șirul de fracții (de tipul: ce fracție urmează după $\frac{34}{100}$?) sau despre scrierea zecimală a acestor numere. Elevul care nu răspunde corect este eliminat din joc. Jocul continuă cu elevul care urmează. Câștigătorul este jucătorul care rămâne ultimul în joc.

2.5. Jocul reprezentărilor

Jocul se desfășoară între 2 parteneri. Pentru acest joc, câmpul de joc este format din carioaje dreptunghiulare, de diverse dimensiuni. Participanții trebuie să reprezinte pe carioajele date câteva fracții, indicate de conducătorul jocului (exemplu: *reprezintă pe carioajele de mai jos fracțiile $\frac{4}{6}, \frac{1}{5}, \frac{3}{8}$*)



Câștigătorul este jucătorul care reprezintă corect fracțiile date, în timp minim.

Pentru exemplul dat, observăm că principala dificultate cu care se pot confrunta elevii este alegerea caroiajului adecvat pentru reprezentarea fiecăreia fracții.

3. Concluzii

Aceste jocuri au fost propuse unor elevi din clasele a IV-a și a V-a, ca modalitate de familiarizare cu fracțiile și operațiile cu fracții. În urma desfășurării la clasă a unor astfel de activități, am remarcat că fracțiile sunt mai bine înțelese de elevii la care am introdus relația de echivalență a fracțiilor și operațiile cu fracții prin joc, comparativ cu clasele la care predarea s-a făcut în mod tradițional. Prin jocul baghetelor, amplificarea și simplificarea fracțiilor, ca și relația de echivalență, apar în mod natural. Ca urmare, elevii pot justifica mai bine amplificarea și simplificarea unei fracții și înțeleg necesitatea aducerii la același numitor pentru adunare sau scădere. Înmulțirea și împărțirea cu/ la un număr natural se fixează mai ușor, iar interesul elevilor pentru operarea cu fracții crește.

În concluzie, considerăm că utilizarea jocurilor didactice în învățarea matematicii este foarte utilă.

Bibliografie

- [1] Pinter, K., *Create Games From Mathematical Problems*, MASSEE International Congress of Mathematics, 2006.
- [2] Singer, M. și al., *Matematică. Manual pentru clasa a V-a*, Ed.Sigma, 2002.
- [3] Singer, M., Voica, C., *Cum demonstrăm? De la intuiție la rigoare matematică*, Ed. Sigma, 2005.