13th CONFERENCE OF APPLIED AND INDUSTRIAL MATHEMATICS

CAIM 2005

PROCEEDINGS OF THE 6th SECTION

Descrierea CIP **(de pus ulterior!!)**

ROMAI Educational Journal
Vol.**1** (2006)

CONTENTS

ROMAI Educational Journal
Vol.**1** (2006)

CUPRINS

!!!! aici se pot pune date despre editura, tipografie, editori...!!!!!

SOCIETATEA ROMÂNĂ DE MATEMATICĂ APLICATĂ ŞI INDUSTRIALĂ

ROMAI
EDUCATIONAL JOURNAL

VOL. 1 (2006)

13TH CONFERENCE OF
APPLIED AND INDUSTRIAL MATHEMATICS
CAIM 2005

PROCEEDINGS OF THE 6TH SECTION

În perioada 14-16 Octombrie 2005, la Universitatea din Piteşti s-a desfăşurat cea de-a 13-a ediţie a Conferinţei de Matematică Aplicată şi Industrială (CAIM 2005). Lucrările Conferinţei au fost grupate în 6 secţiuni, şi anume: 1. Algebră, logică, topologie; 2. Ecuaţii diferenţiale ordinare şi sisteme dinamice finit dimensionale; 3. Analiză funcţională. Ecuaţii cu derivate parţiale; 4. Metode analitice şi numerice în mecanică. Matematică industrială; 5. Informatică teoretică; 6. Educaţie.

În total, la lucrări au participat aproximatix 100 de specialişti din România, Republica Moldova, Canada, Japonia, Italia, Rusia, Ucraina, unii participanţi străini fiind prezenţi la CAIM pentru a 5-a oară.

Temele abordate au fost atât unele clasice, cât şi unele de interes recent. Dintre participanţi, semnalăm prezenţa predominantă a cadrelor didactice universitare şi a cercetătorilor interesaţi în matematici aplicate, sau în domenii de matematică pură, a inginerilor, fizicienilor, informaticienilor şi a unor profesori din învăţământul preuniversitar.

Spre deosebire de alte ediţii ale CAIM, de data aceasta numărul participanţilor la secţiunea a 6-a – Educaţie – a fost mult mai mare, iar lucrările prezentate în cadrul acestei secţii au cuprins tematici mai variate.

O caracteristică a acestei secţiuni a constituit-o transformarea fiecărei lucrări într-o mini-masă rotundă, prin dezbaterile privitoare la tematica prezentată şi la posibilele continuări ale acesteia, ca teme de cercetare în didactica matematică. În acest fel, participanţii la discuţii au îmbogăţit perceperea materialului prezentat cu exemple şi observaţii profunde.

Volumul de faţă conţine majoritatea lucrărilor secţiei de Educaţie CAIM 2005. În cele ce urmează, prezentăm pe scurt tendinţele manifestate în aceste lucrări.

Continuând tradiţia ultimilor ani, unul dintre articole (*Axiomatica şi geometria neeuclidiană*) a prezentat aspecte de istoria matematicii. Sunt evidenţiate ideile care au condus la apariţia modelelor neeuclidiene şi sunt prezentate modelele lui Klein, Poincaré şi Riemann.

Patru dintre lucrările prezentate (*Aplicaţii ale metodei inducţiei matematice, Module. Inegalităţi, Inegalităţi în triunghi, Numere prime - câteva teoreme remarcabile şi aplicaţii ale acestora*) au vizat aplicaţii ale unor rezultate teoretice cunoscute. În aceste lucrări, partea originală o constituie modul de alegere şi ordonare a problemelor propuse – un adevărat ghid pentru aplicaţiile la clasă.

Din ce în ce mai multe comunicări pun elevul în prim-planul studiilor făcute. Unele dintre aceste lucrări (*Utilizarea materialelor didactice pentru învăţarea matematicii în gimnaziu, Învăţarea prin proiect, Utilizarea hărţilor conceptuale în predarea algebrei*) prezintă strategii moderne în procesul de învăţământ, mai puţin cunoscute şi utilizate în România. Aceste lucrări avansează recomandări generale privind modul de organizare şi desfăşurare a acestor strategii, precum şi exemple concludente. Alte comunicări (*Strategii ale jocurilor logice, Predarea-învăţarea eficientă a matematicii în ciclul primar*) prezintă metode exersate la clasă şi observaţii asupra acestora.

O altă categorie (*O clasificare cinematică a problemelor de matematică, Un studiu privind învăţarea spaţiilor vectoriale*) o constituie lucrările de cercetare în domeniul Educaţiei Matematice.

O noutate pentru CAIM a fost prezentarea unor comunicări (*Systems of computerized mathematics in the teaching process*, *Tehnologii moderne în procesul de învăţământ*) privind modalităţi de utilizare a unor soft-uri specializate.

De asemenea, spre deosebire de anii trecuţi, remarcăm cu bucurie apariţia unor comunicări de matematică aplicată (*Cum a fost contestată propagarea rectilinie a luminii, Legarea predării geometriei de practică, Matematica în sprijinul fizicii*), ce se adresează cadrelor didactice preuniversitare şi care ar fi de dorit ca în anii ce vin să constituie o parte însemnată a comunicărilor secţiei de Educaţie a CAIM.

Partea cea mai interesantă a secţiunii Educaţie au fost însă, după părerea noastră, dezbaterile ample care au urmat prezentării fiecărei lucrări în parte. Părerile şi comentariile exprimate de către participanţi, plusurile şi minusurile evidenţiate despre fiecare lucrare, sugestiile privind posibile continuări ale lucrărilor ca teme de cercetare – toate acestea ar putea conduce, la următoarele Conferinţe, la reconsiderarea elevului, ca principală ţintă a cercetărilor de Educaţie Matematică.

Prof. univ. dr. Adelina GEORGESCU
Preşedinte ROMAI

Lector univ. dr. Cristian VOICA

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 5-12

APLICAŢII ALE METODEI INDUCŢIEI MATEMATICE

Liliana ANTONESCU
Şcoala nr. 1 *Liviu Rebreanu*
Mioveni, Argeş

Marius ANTONESCU
Şcoala cu clasele I – VIII
Leiceşti, Argeş

APPLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INDUCTION METHOD

ABSTRACT. The method of mathematical induction consists in proving the validity of a proposition *P(n)*, depending on a natural number *n*. The method uses the well-ordering property of **N**, i.e. every non-empty subset of the set of natural numbers contains a smallest number.
In the paper, the following three equivalent enounces for the method of mathematical induction are presented:
1. Let *P(n)* be a proposition depending on the positive integer *n* and let *a* be a natural number. Suppose that *P(a)* is true and that $P(k) \to P(k+1)$ is a true statement, for all $k \geq a$. Then *P(n)* is true for any $n \geq a$.
2. Let *P(n)* be a proposition depending on the positive integer *n* and let *a* be a natural number. Suppose that *P(a)* is true and that for any $k \in \mathbf{N}$, with $a \leq k \leq n$, $P(k) \to P(n+1)$ is a true statement. Then *P(n)* is true for any $n \geq a$.
3. Let *P(n)* be a proposition depending on the positive integer *n* and let *a* be a natural number. Suppose that all the propositions $P(a), P(a+1), \ldots, P(a+p)$ are true and that all the implications $P(k) \to P(k+p)$ are true, for any $k \geq a$. Then *P(n)* is true for any $n \geq a$.
For all these enounces, applications are presented.

1. Inducţia matematică: o primă variantă

Varianta 1. *Fie* P(n) *o propoziţie matematică care depinde de un număr natural* $n \geq a$*,* a *fiind un număr natural fixat.*
Dacă

1. propoziţia P(a) *este adevărată*
2. oricare ar fi $k \geq a$*, implicaţia* $P(k) \to P(k+1)$ *este adevărată,*

atunci oricare ar fi $n \geq a$, P(n) *este adevărată.*

Această variantă poate fi aplicată în probleme care implică demonstrarea unor inegalităţi, de tipul celor din problemele 1 şi 2.

Problema 1. *Demonstraţi că dacă* $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n > 0$ *astfel încât* $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$*, atunci* $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$*, unde* $n \in \mathbf{N}^*$.

<u>*Demonstraţie*</u>. *P(1):* $x_1 > 0$, astfel încât $x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$.
Presupunând *P(k)* adevărată, vom demonstra $P(k) \to P(k+1)$.

P(k): $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_k > 0$ astfel încât $\prod_{i=1}^{k} x_i = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq k$.

Fie $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_k; x_{k+1} > 0$ astfel încât $\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1$. Deoarece $\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1$, unul dintre aceste numere este mai mare sau egal decât 1 şi altul este mai mic sau egal decât 1.
Să considerăm $x_p \leq 1$ şi $x_{p+1} \geq 1$; atunci

$$(x_p - 1)(x_{p+1} - 1) \leq 0 \Rightarrow x_p + x_{p+1} \geq 1 + x_p \cdot x_{p+1}$$

Fie $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_{k-1}; x_p \cdot x_{p+1}$, cu $x_k = x_p \cdot x_{p+1}$, k numere pozitive cu produsul 1.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k \geq k \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_p \cdot x_{p+1} \geq k$$

Cum $x_p + x_{p+1} \geq 1 + x_p \cdot x_{p+1}$, prin adunarea ultimelor două relaţii se obţine

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_p + x_{p+1} \geq k + 1.$$

Pentru $x_k = x_p$ şi $x_{k+1} = x_{p+1}$ se obţine

P(k + 1): Dacă $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_k; x_{k+1} > 0$ astfel încât $\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{k+1} x_i \geq k + 1$.

Deci *P(n)* este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit astfel:*

$$x_1 = 1,\ (n + 1)x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n},\ \forall\ n \geq 1.$$

Se cere să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n$.

<u>Demonstraţie</u>. Vom arăta prin inducţie matematică dubla inegalitate

$$\frac{2}{\sqrt{4n+5}-1} \leq x_n \leq \frac{2}{\sqrt{4n+1}-1},\ \forall\ n \geq 1,$$

de unde, folosind lema cleştelui, va rezulta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n = 1$.

Fie *P(n):* $\dfrac{2}{\sqrt{4n+5}-1} \leq x_n \leq \dfrac{2}{\sqrt{4n+1}-1},\ \forall\ n \geq 1$.

P(1): $\dfrac{2}{3-1} \leq x_1 \leq \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ este o propoziţie adevărată.

Presupunând *P(k)* adevărată, vom demonstra *P(k)* $\to$ *P(k +1)*.

$$P(k):\ \frac{2}{\sqrt{4k+5}-1} \leq x_k \leq \frac{2}{\sqrt{4k+1}-1}.$$

$$P(k + 1):\ \frac{2}{\sqrt{4k+9}-1} \leq x_{k+1} \leq \frac{2}{\sqrt{4k+5}-1}$$

Avem

$$\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2} \leq \frac{1}{x_k} \leq \frac{\sqrt{4k+5}-1}{2},$$

de unde

$$\frac{\sqrt{4k+1}+1}{2} \le 1+\frac{1}{x_k} \le \frac{\sqrt{4k+5}+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{4k+1}+1}{2(k+1)} \le \frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{x_k}\right) \le \frac{\sqrt{4k+5}+1}{2(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4k}{2(k+1)\left(\sqrt{4k+1}-1\right)} \le x_{k+1} \le \frac{4(k+1)}{2(k+1)\left(\sqrt{4k+5}-1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k}{(k+1)\left(\sqrt{4k+1}-1\right)} \le x_{k+1} \le \frac{2}{\left(\sqrt{4k+5}-1\right)}.$$

Pentru a încheia, este suficient să arătăm că

$$\frac{2}{\sqrt{4k+9}-1} \le \frac{2k}{(k+1)\left(\sqrt{4k+1}-1\right)}.$$

Dar

$$\frac{2}{\sqrt{4k+9}-1} \le \frac{2k}{(k+1)\left(\sqrt{4k+1}-1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+1)\sqrt{4k+1}-k-1 \le k\sqrt{4k+9}-k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+1)\sqrt{4k+1} \le 1+k\sqrt{4k+9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2(4k+1) \le 1+2k\sqrt{4k+9}+k^2(4k+9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \le \sqrt{4k+9},$$

ceea ce este evident adevărat.

Aceeaşi variantă a principiului inducţiei matematice poate fi folosită pentru a demonstra egalităţi de tipul celor din problemele 3 şi 4.

Problema 3. *Demonstraţi că*

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n+1}{p}\right]+\left[\frac{n+2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{n+p-1}{p}\right]=n,\ \forall\ n, p \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie după *n*.

$$P(1):\ \left[\frac{1}{p}\right]+\left[\frac{2}{p}\right]+\left[\frac{3}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{p-1}{p}\right]+\left[\frac{p}{p}\right]=1 \Rightarrow 1 = 1.$$

Presupunând *P(k)* adevărată, vom demonstra *P(k)* $\to$ *P(k +1)*.

$$P(k):\ \left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k+1}{p}\right]+\left[\frac{k+2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{k+p-1}{p}\right]=k.$$

În ultima relaţie se adună $\left[\frac{k+p}{p}\right]-\left[\frac{k}{p}\right]$ în fiecare membru şi se obţine

$$\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k+1}{p}\right]+\left[\frac{k+2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{k+p-1}{p}\right]+\left[\frac{k+p}{p}\right]-\left[\frac{k}{p}\right]=k+\left[\frac{k+p}{p}\right]-\left[\frac{k}{p}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{k+1}{p}\right]+\left[\frac{k+2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{k+p-1}{p}\right]+\left[\frac{k+p}{p}\right]=k+\left[\frac{k}{p}+\frac{p}{p}\right]-\left[\frac{k}{p}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{k+1}{p}\right]+\left[\frac{k+2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{k+p-1}{p}\right]+\left[\frac{k+p}{p}\right]=k+\left[\frac{k}{p}\right]+1-\left[\frac{k}{p}\right]$$

$$\Rightarrow P(k+1):\ \left[\frac{k+1}{p}\right]+\left[\frac{k+2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{k+p-1}{p}\right]+\left[\frac{k+p}{p}\right]=k+1.$$

Deci $P(n)$ adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Problema 4. *Să se găsească exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului*

$$E_n = (n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(n + 3)\cdot\ldots\cdot(n+n),\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Demonstraţie. Se notează exponentul lui 2 din descompunerea lui E_i cu e_i.
Fie $P(n)$: Exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului

$$E_n = (n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(n + 3)\cdot\ldots\cdot(2n),\ n \in \mathbf{N}^*,$$

este $e_n=n$.
Verificăm

$$P(1):\ E_1 = 2 \Rightarrow e_1 = 1$$
$$P(2):\ E_2 = 3\cdot4 \Rightarrow e_2 = 2$$
$$P(3):\ E_3 = 4\cdot5\cdot6 \Rightarrow e_3 = 3$$
$$P(4):\ E_2 = 5\cdot6\cdot7\cdot8 \Rightarrow e_4 = 4.$$

Presupunând $P(k)$ adevărată, vom demonstra $P(k) \to P(k+1)$.

$$P(k):\ E_k = (k + 1)\cdot(k + 2)\cdot(k + 3)\cdot\ldots\cdot(2k) \Rightarrow e_k = k$$
$$E_{k+1} = (k + 2)\cdot(k + 3)\cdot(k + 4)\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k + 1)\cdot(2k + 2)$$
$$\Rightarrow E_{k+1} = (k + 1)\cdot(k + 2)\cdot(k + 3)\cdot(k + 4)\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k + 1)\cdot 2$$
$$\Rightarrow E_{k+1} = E_k\cdot(2k + 1)\cdot 2.$$

În descompunerea numărului $(2k + 1)\cdot 2$, numărul 2 are exponentul 1.

$$P(k + 1):\ E_{k+1} = (k + 2)\cdot(k + 3)\cdot(k + 4)\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k + 1)\cdot(2k + 2)$$
$$\Rightarrow e_{k+1} = e_k + 1 = k + 1.$$

Deci $P(n)$ este adevărată $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

Problema 5. *Un melc se târăşte în timpul zilei 1 m pe un perete în sus, alunecă în jos noaptea cu jumătatea distanţei urcate. Dacă notăm cu* h_n *înălţimea atinsă în seara a* n*-a (exprimată în m), să se arate că* $h_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$.

Demonstraţie. Din datele problemei, deducem relaţia de recurenţă

$$h_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot h_n + 1.$$

Avem $h_1 = 2 - \frac{1}{2^{1-1}} = 2 - 1 = 1$; pentru $n = 1$ afirmaţia din enunţ este verificată.

Fie $h_k = 2 - \frac{1}{2^{k-1}}$, pentru un $k \in \mathbf{N}$; atunci

$$h_{k+1} = \frac{1}{2}\cdot h_k + 1 = \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2^{k-1}}\right)+1 = 1 - \frac{1}{2^k}+1 = 2 - \frac{1}{2^k},$$

aşadar

$$h_{k+1} = 2 - \frac{1}{2^{(k+1)-1}}.$$

În cadrul aceleiaşi variante a inducţiei matematice, prezentăm un exerciţiu cu matrice în care mai întâi descoperim relaţia dorită, apoi o demonstrăm prin inducţie.

Problema 6. *Fie matricea* A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Să se calculeze* A^n.

Demonstraţie. Avem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm că elementele 1, 3, 6 din linia întâi, coloana a treia se pot scrie

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2},\ 3 = \frac{2 \cdot 3}{2},\ 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}.$$

Este sugerată următoarea ipoteză de lucru

$$P(n):\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstrăm această ipoteză prin inducţie. Propoziţia *P(1)* este evident adevărată.

Să presupunem *P(k):* $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{(k-1)k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ adevărată.

Avem

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

adică *P(k + 1)* adevărată şi deci *P(k)* $\to$ *P(k + 1)*.
Deducem că *P(n)* este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Inducţia matematică: a doua variantă

Varianta 2. *Fie* P(n) *o propoziţie matematică, care depinde de un număr natural* n ≥ a, a *fiind un număr natural fixat. Dacă*

1. P(a) *este adevărată*
2. oricare ar fi $k \in$ **N***, astfel încât* $a \le k \le n$*, implicaţia* $P(k) \to P(n + 1)$ *este adevărată,*
atunci, oricare ar fi $n \ge a$, P(n) *este adevărată.*

În următorul exerciţiu vom aplica această variantă.

Problema 7. *Să se determine funcţiile* f: **N***$\to$**N*** *care îndeplinesc condiţiile:*
a) $f(p) = p$*, dacă* p *este număr prim;*
b) $f(n\cdot m) = f(n)\cdot f(m)$, *oricare ar fi* $n, m \in$ **N***.

Demonstraţie. Înlocuind în relaţia b) pe n cu 1 şi m cu 1, obţinem $f(1) = f^2(1)$. Deoarece $f(1) \neq 0$, rezultă $f(1) = 1$. Pe de altă parte, din a) deducem

$$f(2) = 2, f(3) = 3, f(5) = 5 \text{ etc.}$$

Folosind b) obţinem

$$f(4) = f(2)\cdot f(2) = 4, f(6) = f(2)\cdot f(3) = 6.$$

Ni se sugerează propoziţia $P(n)$: $f(n) = n, n \ge 1$. Demonstrăm prin inducţie.
$P(1)$: $f(1) = 1$ este propoziţie adevărată. Să presupunem că propoziţia $P(k)$: $f(k) = k$, este adevărată $\forall k$ astfel încât $1 \le k \le n$.
Dacă $n + 1$ este număr prim, atunci $f(n + 1) = n + 1$, adică $P(n + 1)$ este adevărată.
Dacă $n + 1$ nu este număr prim, există $1 < k_1 < n + 1$ şi $1 < k_2 < n + 1$, astfel încât $n + 1 = k_1k_2$.
Deoarece $k_1 \le n$ şi $k_2 \le n$, avem

$$f(k_1) = k_1, f(k_2) = k_2,$$

deci

$$f(k_1k_2) = f(k_1)\cdot f(k_2).$$

Rezultă

$$f(n + 1) = k_1k_2 = n + 1.$$

Demonstraţia arată că, dacă există o funcţie f: ***N****$\to$***N****, care îndeplineşte condiţiile a) şi b) din enunţul problemei, atunci aceasta este funcţia $f(n) = n$. Cum această funcţie verifică condiţiile a) şi b), rezultă că singura funcţie f: ***N****$\to$***N****, care verifică aceste condiţii este funcţia $f(n) = n$.

3. Inducţia matematică: a treia variantă

Varianta 3. *Fie* a *şi* p *două numere naturale fixate şi* $n \in$ **N**. *Dacă*
1. propoziţiile P(a), P(a +1), …, P(a + p) *sunt adevărate,*
2. implicaţia $P(k) \to P(k + p)$ *este adevărată pentru orice* $k \ge a$*,*
atunci propoziţia P(n) *este adevărată pentru orice* $n \ge a$.

Demonstrăm câteva aplicaţii ale acestei variante.

Problema 8. *Să se arate că* $\forall n \in$ **N**, $n \ge 6$ *ecuaţia*

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

are soluţii în **N**.

Demonstraţie. Pentru a justifica faptul că propoziţiile *P(6)*, *P(7)* şi *P(8)* sunt adevărate, observăm egalităţile

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=1,$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=1,$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{21^2}=1.$$

Presupunând *P(k)* adevărată, vom demonstra $P(k) \to P(k+3)$.
Propoziţia *P(k)* afirmă că ecuaţia

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\dots+\frac{1}{x_{k-1}^2}+\frac{1}{x_k^2}=1$$

are soluţie în mulţimea numerelor naturale; fie $S = \{(x_1; x_2; x_3; \dots; x_k)\}$, $x_i \in \mathbf{N}$, $i=\overline{1;k}$, o soluţie a acestei ecuaţii.
Deducem că ecuaţia

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\dots+\frac{1}{x_{k-1}^2}+\frac{1}{(2x_k)^2}+\frac{1}{(2x_k)^2}+\frac{1}{(2x_k)^2}+\frac{1}{(2x_k)^2}=1,$$

are soluţia $S' = \{(x_1; x_2; x_3; \dots; x_{k-1}; 2x_k; 2x_k; 2x_k; 2x_k)\}$, $x_i \in \mathbf{N}$ pentru $i = \overline{1;k}$. De aceea, propoziţia *P(k+3)* este adevărată. Deci *P(n)* este adevărată $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 6$.

Problema 9. *Să se demonstreze că* $\forall$ n $\in$ **Z**, $\exists$ p $\in$ **N*** *şi o alegere a semnelor* + *sau* – *astfel încât*

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm p^2.$$

Demonstraţie. Este suficientă demonstraţia pentru $n \in \mathbf{N}$, deoarece prin înmulţire cu -1 se obţine demonstraţia pentru $n \in \mathbf{Z}$. Verificăm faptul că propoziţia este adevărată pentru n = 0, 1, 2 şi 3.

$P(0)$: $0 = +1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$

$P(1)$: $1 = +1^2$

$P(2)$: $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$

$P(3)$: $3 = -1^2 + 2^2$.

Presupunând *P(k)* adevărată, vom demonstra că $P(k) \to P(k+4)$.

$$P(k):\ k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm p^2$$

$$\Rightarrow k + 4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm p^2 + 4$$

$$\Rightarrow P(k+4):\ k + 4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm p^2 + (p+1)^2 - (p+2)^2 - (p+3)^2 + (p+4)^2.$$

Deci *P(n)* adevărată $\forall n \in \mathbf{Z}$.

Problema 10. *Să se demonstreze că dacă* $E_n = 2^n + 1$, *atunci* $E_n \notin M_7$, $\forall$ n $\in$ **N**.

Demonstraţie. Fie $P(n)$: $E_n \notin M_7$.

$P(0)$: $E_0 = 2^0 + 1 \Rightarrow E_0 = 2 \Rightarrow$ $2 \bmod 7 = 2 \Rightarrow E_0 \notin M_7$

$P(1)$: $E_1 = 2^1 + 1 \Rightarrow E_1 = 3 \Rightarrow$ $3 \bmod 7 = 3 \Rightarrow E_1 \notin M_7$

$P(2)$: $E_2 = 2^{2} + 1 \Rightarrow E_2 = 5 \Rightarrow 5 \bmod 7 = 5 \Rightarrow E_2 \notin M_7$
$P(3)$: $E_3 = 2^{3} + 1 \Rightarrow E_3 = 9 \Rightarrow 9 \bmod 7 = 2 \Rightarrow E_3 \notin M_7$
$P(4)$: $E_4 = 2^{4} + 1 \Rightarrow E_4 = 17 \Rightarrow 17 \bmod 7 = 3 \Rightarrow E_4 \notin M_7$
$P(5)$: $E_5 = 2^{5} + 1 \Rightarrow E_5 = 33 \Rightarrow 33 \bmod 7 = 5 \Rightarrow E_5 \notin M_7$
$P(6)$: $E_6 = 2^{6} + 1 \Rightarrow E_6 = 65 \Rightarrow 65 \bmod 7 = 2 \Rightarrow E_6 \notin M_7$.

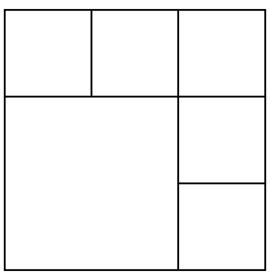
Observăm că situaţia se repetă din 3 în 3. De aceea, presupunând $P(k)$ adevărată, vom demonstra $P(k) \rightarrow P(k+3)$.

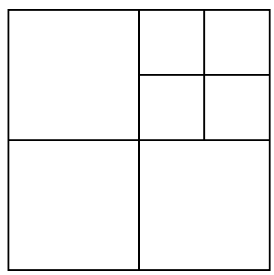
$P(k)$: $E_k = 2^{k} + 1 \Rightarrow E_k \notin M_7$
$E_{k+3} - E_k = 2^{k+3} + 1 - 2^k - 1 \Rightarrow$
$E_{k+3} - E_k = 2^{k}(2^{3} - 1) \Rightarrow$
$E_{k+3} - E_k = 2^{k} \cdot 7 \Rightarrow$
$E_{k+3} - E_k \in M_7 \Rightarrow$
$E_{k+3} = E_k + 7m$.

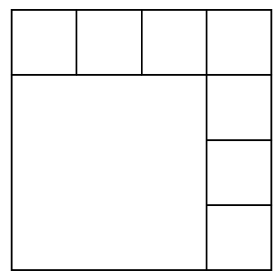
Cum $P(k) \Rightarrow E_k \notin M_7$, deducem că $E_{k+3} = 2^{k+3} + 1 \notin M_7$.
Deci $P(n)$ adevărată $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Problema 11. *Să se arate că* $\forall$ n $\in$ **N**, n $\geq$ 6*, un pătrat poate fi împărţit în* n *pătrate*.

Demonstraţie.

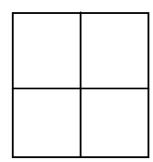
P6


P7


P8


Presupunând $P(k)$ adevărată, vom demonstra $P(k) \rightarrow P(k+3)$.

Alegem un pătrat din descompunerea lui $P(k)$ şi îl împărţim în patru pătrate, ca în desenul alăturat. Vom obţine astfel $k + 3$ pătrate în descompunere.



Deci $P(n)$ este adevărată $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 6$.

Inducţia incompletă nu conduce mereu la propoziţii adevărate, dar este folositoare, deoarece permite să se formuleze o presupunere, care după aceea poate fi confirmată sau infirmată. În schimb inducţia completă este metoda de raţionament în care concluzia rezultă pe baza cercetării tuturor cazurilor.

Bibliografie

[1] Georgescu Buzău, E., Onofraş, E., *Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Popa, S., *Matematică – manual pentru clasa a X-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1990.
[3] *Dicţionar de matematică*, Ed. Danubius, Bucureşti.
[4] *Gazeta Matematică*, Nr. 5-6/1998, Societatea de Ştiinţe Matematice din România.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 13-16

MODULE. INEGALITĂŢI

Georgeta COJOCARU, Ion COJOCARU
Şcoala nr.1 *Liviu Rebreanu*
Mioveni, Argeş

INEQUALITIES INVOLVING THE ABSOLUTE VALUE

ABSTRACT. The modulus (or the absolute value) of a real number x is defined as the distance between the point at the origin and the point representing x on the real line. Using this definition, we can prove identities and inequalities containing absolute values of different numbers. We present some well-known properties of the absolute value, and we apply them in various problems for the 8^{th} grade.

În această lucrare, vom utiliza definiţia modulului prezentă în [1].

Definiţie. *Modulul (sau valoarea absolută) a unui număr este distanţa de la origine la punctul ce reprezintă numărul dat pe o axă a numerelor*.

Modulul numărului a se notează $|a|$ şi se citeşte *modulul lui a* sau *valoarea absolută* a lui a.

Pentru orice număr $a \in \boldsymbol{R}$, modulul lui este

$$|a| = max\,(a, -a) = \begin{cases} a, & dacă \quad a > 0 \\ 0, & dacă \quad a = 0 \\ -a, & dacă \quad a < 0 \end{cases}$$

Următoarele proprietăţi ale modulului sunt bine cunoscute:

1. $|a| \geq a$, pentru orice $a \in \boldsymbol{R}$;
2. $|a| = |-a|$, pentru orice $a \in \boldsymbol{R}$;
3. $|a| \geq 0$, pentru orice $a \in \boldsymbol{R}$;
   $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$, pentru orice $a, b \in \boldsymbol{R}$;
5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, pentru orice $a, b \in \boldsymbol{R}$;
6. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, pentru orice $a, b \in \boldsymbol{R}, b \neq 0$;
7. a) $|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$, pentru orice $a > 0$, $a, x \in \boldsymbol{R}$;
   b) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, pentru orice $a > 0$, $a, x \in \boldsymbol{R}$;
   c) $|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty) \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - [-a, a]$, pentru $a > 0$, $a, x \in \boldsymbol{R}$;
   d) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - (-a, a)$, pentru $a > 0$, $a, x \in \boldsymbol{R}$;
8. $||a| - |b|| \leq |a - b|$, pentru orice $a, b \in \boldsymbol{R}$.

În ceea ce urmează, prezentăm câteva aplicaţii ale acestor proprietăţi în probleme ce pot fi propuse pentru clasa a VIII-a.

Problema 1. *Demonstraţi că:*

a) $|x-1|+|x-3| \geq 2$;

b) $|x-1|+|x-3| = 2 \Leftrightarrow (3-x)(x-1) \geq 0$.

<u>*Soluţie.*</u>

a) Cum $|x-3| = |3-x|$ (proprietatea 2) avem

$$|x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq |x-1+3-x| = 2$$

(s-a folosit proprietatea 4).

b) Egalitatea se realizează în inegalitatea anterioară dacă şi numai dacă numerele $x-1$ şi $3-x$ au acelaşi semn, ceea ce este echivalent cu $(x-1)(3-x) \geq 0$.

Problema 2. [2]

a) Demonstraţi că $|x-3|+|x-4|+|x-5| \geq 2$, *oricare ar fi* $x \in \mathbf{R}$.

b) Demonstraţi că nu există $x \in \mathbf{R}$ *astfel încât* $|x+1| + |x+5| = 3$.

<u>*Soluţie.*</u> a)

$$|x-3| + |x-4| = |x-3| + |-(x-4)| \geq |x-3-(x-4)| \Rightarrow |x-3| + |x-4| \geq 1,$$

$$|x-3| + |x-5| = |x-3| + |-(x-5)| \geq |x-3-(x-5)| \Rightarrow |x-3| + |x-5| \geq 2,$$

$$|x-4| + |x-5| = |x-4| + |-(x-5)| \geq |x-4-(x-5)| \Rightarrow |x-4| + |x-5| \geq 1$$

(s-au folosit proprietăţile 2 şi 4).

Adunând membru cu membru inegalităţile anterioare, obţinem

$$2(|x-3| + |x-4| + |x-5|) \geq \geq 4 \Leftrightarrow |x-3| + |x-4| + |x-5| \geq 2.$$

b) $|x+1| + |x+5| = |-(x+1)| + |x+5| \geq |-x-1+x+5| \Leftrightarrow |x+1| + |x+5| \geq 4$, de unde

$$|x+1| + |x+5| \neq 3 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

Problema 3. *Arătaţi că*

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{|x+y|+|x-y|}{2}, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

<u>*Soluţie*</u>. Din egalitatea

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2),$$

obţinem egalitatea

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 + 2|x+y| \cdot |x-y| = 2(x^2+y^2) + 2|x+y| \cdot |x-y|$$

echivalentă cu

$$(|x+y| + |x-y|)^2 = 2(x^2+y^2) + 2|x+y| \cdot |x-y|.$$

Folosind inegalitatea

$$|x+y| \cdot |x-y| \leq x^2+y^2, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R},$$

deducem

$$(|x+y| + |x-y|)^2 \leq 4(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow |x+y| + |x-y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{|x+y|+|x-y|}{2}.$$

Problema 4. *Arătaţi că oricare ar fi* x, y ∈ **R**,

$$2(|x + y| + |xy|) \leq (|x| + |y|) \cdot (|x| + |y| + 2).$$

<u>*Soluţie.*</u> Folosind inegalităţile

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

şi

$$2 \cdot |x| \cdot |y| \leq (|x| + |y|)^2,$$

inegalitatea din enunţ devine

$$2(|x + y| + |xy|) \leq 2(|x| + |y| + (|x| + |y|)^2)$$
$$\Leftrightarrow 2(|x + y| + |xy|) \leq (|x| + |y|) \cdot (|x| + |y| + 2),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

Problema 5. *Arătaţi că pentru orice* x, y, z ∈ **R**,

$$x^2 + (y + z)^2 \geq |x + y + z| \cdot |y - x + z|.$$

<u>*Soluţie.*</u> În inegalitatea $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab,\ (\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, înlocuim $a = |y-x+z|$, $b = |x+y+z|$ şi obţinem

$$\frac{(x+y+z)^2+(y-x+z)^2}{2} \geq |y-x+z| \cdot |x+y+z|. \qquad (1)$$

Cum

$$(x + y + z)^2 + (y - x + z)^2 = 2 \cdot [x^2 + (y + z)^2],$$

înlocuim în relaţia (1) şi obţinem inegalitatea cerută.

Problema 6. *Pentru* x > 0, y > 0 *şi* z > 0 *dovediţi că*

$$(xy + yz + xz) \cdot \left|1-\frac{1}{xyz}\right| \leq \left|xy-\frac{1}{z}\right| + \left|yz-\frac{1}{x}\right| + \left|xz-\frac{1}{y}\right|.$$

<u>*Soluţie.*</u> Cum $x > 0$, $y > 0$ şi $z > 0$, rezultă că

$$xy+yz+xz>0,$$

de unde

$$xy + yz + xz = |xy + yz + xz|.$$

Deci

$$(xy+yz+xz)\cdot\left|1-\frac{1}{xyz}\right| = |xy+yz+xz|\cdot\left|1-\frac{1}{xyz}\right| = \left|xy+yz+xz-\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| =$$
$$= \left|\left(xy-\frac{1}{z}\right)+\left(yz-\frac{1}{x}\right)+\left(xz-\frac{1}{y}\right)\right| \leq \left|xy-\frac{1}{z}\right|+\left|yz-\frac{1}{x}\right|+\left|xz-\frac{1}{y}\right|$$

(s-au folosit proprietăţile 2, 4 şi 5).

Problema 7. *Arătaţi că oricare ar fi* a, b ∈ **R** – {0}, |a| ≠ |b| *şi* n ∈ **N**,

$$n \cdot \min(|a^{n-1}|, |b^{n-1}|) \leq \frac{|a^n|-|b^n|}{|a|-|b|} \leq n \cdot \max(|a^{n-1}|, |b^{n-1}|).$$

Soluţie. Avem $\frac{|a^n|-|b^n|}{|a|-|b|} = |a^{n-1}| + |a^{n-2}| \cdot |b| + \ldots + |a| \cdot |b^{n-2}| + |b^{n-1}|$

Dacă $|a| > |b|$ rezultă

$$n \cdot |b^{n-1}| < \frac{|a^n|-|b^n|}{|a|-|b|} < n \cdot |a^{n-1}|.$$

Dacă $|a| < |b|$ rezultă

$$n \cdot |a^{n-1}| < \frac{|a^n|-|b^n|}{|a|-|b|} \leq n \cdot |b^{n-1}|.$$

Deci

$$n \cdot min(|a^{n-1}|, |b^{n-1}|) < \frac{|a^n|-|b^n|}{|a|-|b|} < n \cdot max(|a^{n-1}|, |b^{n-1}|),$$

$(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R} - \{0\}$, $|a| \neq |b|$.

Problema 8. *Arătaţi că*

$$(|a| + |b| + |c|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|c|}\right) \geq 9,\ (\forall)\ a, b, c \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Soluţia 1. În inegalitatea

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz},\ (\forall)\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$$

se înlocuiesc $x = |a|$, $y = |b|$ şi $z = |c|$ şi se obţine

$$|a| + |b| + |c| \geq 3\sqrt[3]{|a|\cdot|b|\cdot|c|}. \quad (1)$$

În aceeaşi inegalitate se înlocuiesc $x = \frac{1}{|a|}$, $y = \frac{1}{|b|}$ şi $z = \frac{1}{|c|}$ şi se obţine

$$\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|c|} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{|a|\cdot|b|\cdot|c|}}. \quad (2)$$

Înmulţind membru cu membru inegalităţile (1) şi (2) obţinem inegalitatea cerută.

Soluţia 2.

$$(|a| + |b| + |c|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|c|}\right) = 3 + \frac{a^2+b^2}{|a|\cdot|b|}+\frac{b^2+c^2}{|b|\cdot|c|}+\frac{c^2+a^2}{|c|\cdot|a|} \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9,$$

pentru că

$$\frac{x^2+y^2}{|x|\cdot|y|} \geq 2,\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Bibliografie

[1] Radu, D., Radu, E., *Manual de matematică pentru clasa a VIII-a*, Ed. Teora, Bucureşti, 2000.
[2] Dobre, E., Simion, S., Dobre, G., *Contributii metodice*, 1982.
[3] Turcitu, G., Basarab, C., Rizea, I., Duncea, M., Chiriac, I., Ciungu, P., *Manual de matematică pentru clasa a VI-a*, Ed. Radical, Bucureşti, 1998.
[4] Cojocaru, I., Cojocaru, G., *Teme si teste pentru clasa a VIII-a*, Ed. Cart Educational, Piteşti, 2003.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 17-26

UTILIZAREA MATERIALELOR DIDACTICE PENTRU ÎNVĂŢAREA MATEMATICII ÎN GIMNAZIU

Elena DAVID
Şcoala nr.71 *Iovan Ducici*, Bucureşti

**USING SCHOOL SUPPLIES
IN TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOL**

ABSTRACT. Teaching aids can help students to have multiple representations of mathematical concepts. In this paper, I present some school supplies and discuss the possibility of using them in the teaching practice. The school supplies are manufactured by ourself. They consist in cubes, made by folding sheets of paper, and other polyhedrons obtained by glueing several cubes. We indicate some didactical applications of these school supplies: proving divisibility properties, highlighting featurers of perfect squares and perfect cubes, proving some algebraic formulae.

1. Introducere

Profesorul de matematică trebuie să folosească la clasă metode active de învăţare deoarece o persoană reţine aproximativ 10% din ceea ce citeşte, 20% din ceea ce aude, 30% din ceea ce vede şi aude, 80% din ceea ce face şi 90% din ceea ce face şi justifică.

Folosirea materialelor didactice ajută elevii să-şi formeze reprezentări multiple asupra conceptelor matematice, transformându-i din simpli spectatori în actori principali, angrenaţi activ în propria lor dezvoltare.

Utilizarea materialelor didactice sub formă de joc didactic imprimă activităţii instructiv-educative un caracter viu şi atrăgător, aduce varietate şi o stare de bună dispoziţie, ceea ce previne apariţia monotoniei, a plictiselii sau a oboselii. Jocul didactic pune în valoare cunoştinţele elevilor şi le dezvoltă creativitatea.

În acest articol prezentăm câteva materiale didactice şi modul în care pot fi acestea folosite pentru învăţarea matematicii în gimnaziu.

2. Prezentarea materialelor didactice

Fig.1.

Setul de materiale didactice din fig.1 este alcătuit din cuburi sau ansambluri de cuburi confecţionate din carton. Majoritatea cuburilor au lungimea muchiei de 5 cm. Setul conţine de asemenea cuburi cu muchia de 1 cm sau 10 cm.

Aceste materiale pot fi confecţionate atât de către profesor cât şi de către elevi.

Este recomandabil ca pentru un colectiv de 20 de elevi să avem 4-5 astfel de seturi de materiale.

Aceste materiale didactice pot fi folosite în gimnaziu pentru a introduce concepte matematice precum: împărţirea cu rest a numerelor naturale, divizibilitatea numerelor naturale, ridicarea la putere a numerelor naturale, fracţie ordinară, fracţie zecimală sau raport procentual. Cu ajutorul acestor materiale putem introduce unele formule de calcul algebric cum ar fi: produsul a două sume, ridicarea la pătrat a unei sume cu doi sau trei termeni şi ridicarea la cub a unei sume cu doi termeni. De asemenea folosirea acestor materiale didactice constituie un pretext pentru introducerea unor concepte ca: măsurarea volumului unui corp, corpuri echivalente, progresie aritmetică, progresie geometrică şi raţionament de tip inductiv.

3. Modalităţi de utilizare a materialelor didactice prezentate

• Folosind mai multe cuburi identice putem introduce următoarele noţiuni: număr par/ număr impar, împărţire exactă/ împărţire cu rest (nenul), divizor/ multiplu, număr prim/număr compus.

Exemplul 1.

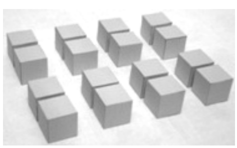


Fig.2.

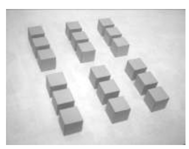


Fig.3.

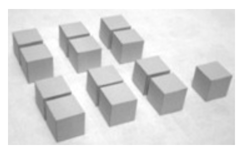


Fig.4.

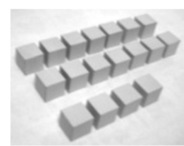


Fig.5.

Dacă împărţim 16 cuburi (fig.2) şi apoi 13 cuburi (fig.3) în grupe de câte două cuburi obţinem în primul caz 8 grupe, iar în al doilea caz 6 grupe şi rest un cub. Putem scrie: $16=2\cdot 8$ şi $13=2\cdot 6+1$, $0<1<2$. Aşadar numărul 16 este de forma $2k$, cu $k = 8$, iar numărul 13 este de forma $2k+1$, cu $k = 6$.

Numerele de forma $2k$, $k \in \boldsymbol{N}$ se numesc numere pare, iar cele de forma $2k+1$, $k \in \boldsymbol{N}$ se numesc numere impare.

Exemplul 2.

Dacă împărţim 18 cuburi în grupe de câte trei cuburi (fig.4) obţinem 6 grupe complete. În acest caz spunem că 18:3 este o împărţire exactă şi notăm 18:3=6. Deoarece $18=3\cdot 6$ afirmăm că 3 divide pe 18 şi notăm 3/18 , sau că 18 este divizibil cu 3 şi notăm $18 \vdots 3$. Spunem de asemenea că 3 este un divizor al lui 18, iar 18 este un multiplu al lui 3.

Dacă împărţim 18 cuburi în grupe de câte 7 (fig.5) obţinem două grupe complete şi una incompletă, formată doar din 4 cuburi. În acest caz spunem că 18:7 este o împărţire cu rest (nenul) şi notăm 18 : 7 = 2 (rest 4) sau $18 = 7\cdot 2+4$, $0<4<7$. În acest caz spunem că 7 nu divide pe 18. De asemenea afirmăm că 7 nu este un divizor al lui 18, iar 18 nu este un multiplu al lui 7.

Exemplul 3.

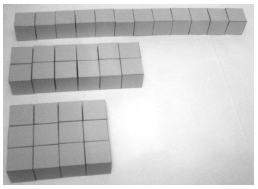


Fig.6.

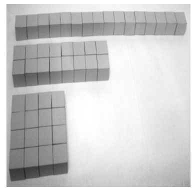


Fig.7.

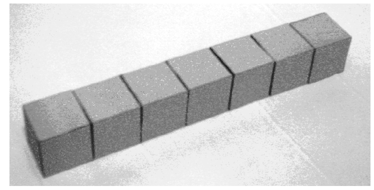


Fig.8.

Cu 12 cuburi identice putem construi corpuri cu un singur strat cu linii şi coloane complete, ca în fig.6. Putem scrie 12=1·12=2·6=3·4. Spunem că 1 şi 12 sunt divizorii improprii ai lui 12, iar 2, 3, 4 şi 6 sunt divizorii proprii ai lui 12. Mulţimea divizorilor naturali ai lui 12 este finită şi se notează cu D_{12}. Scriem D_{12}={1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Cu 16 cuburi identice putem construi corpuri cu un singur strat cu linii şi coloane complete, ca în fig.7. Putem scrie 16 = 1·16 = 2·8 = 4·4 şi D_{16} = {1,2,4,8,16}. Cu *7* cuburi identice putem construi un singur corp cu linii şi coloane complete (fig.8). Aşadar D_7={1, 7}.

Procedând în mod asemănător putem deduce elementele mulţimilor D_{10}, D_{18}, D_{24}, D_{25}, D_{36}, D_{64}, D_2, D_5, D_{17}, D_{23} etc.

Numerele naturale care au doar doi divizori se numesc numere prime (exemple: *7, 2, 5, 17, 23*).

Numerele naturale nenule care au cel puţin trei divizori se numesc numere compuse (exemple: 12, 10, 18, 24). Numerele naturale 0 şi 1 nu sunt nici prime, nici compuse. Numerele naturale care au un număr impar de divizori se numesc numere pătrate perfecte (exemple: 16, 25, 36, 64).

Exemplul 4.

Putem număra 125 de cuburi identice din 10 în 10, din 2 în 2, din 5 în 5, din 3 în 3, din 9 în 9, din 4 în 4 sau din 25 în 25 şi putem scrie şirurile de numere obţinute. Analizând termenii fiecărui şir putem deduce criteriile de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3, 9, 4 şi 25.

De exemplu, dacă numărăm 125 de cuburi din 3 în 3 obţinem următorul şir de numere: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123. Toate aceste numere sunt primii 42 de multipli naturali ai lui 3. Mulţimea multiplilor lui 3 este infinită şi se notează cu M_3. Scriem: $M_3=\{0,3,6,9,12,15,...\}$.

Orice element al mulţimii M_3 este de forma $3k$, $k \in \mathbf{N}$. Numerele naturale cel mult egale cu 125, care lipsesc din şirul anterior, sunt fie de forma $3k+1$, $k \in \mathbf{N}$ (fig.9), fie de forma $3k+2$, $k \in \mathbf{N}$ (fig.10).

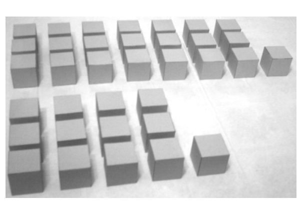


Fig.9.

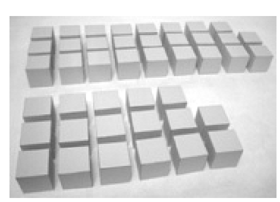


Fig.10.

Analizând primii 42 de multiplii naturali ai lui 3 constatăm că, pentru fiecare astfel de multiplu, suma cifrelor este un număr divizibil cu 3 (de exemplu: 75 $\in M_3$, 7+5=12 şi

$12 \,\vdots\, 3$). Acum putem enunţa criteriul de divizibilitate cu 3 : un număr natural (scris în baza 10) este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.

Demonstraţie. (clasa a VI-a)
Fie $\overline{abc}$ un număr natural, scris în baza 10.
$\overline{abc}=100a+10b+c=99a+9b+(a+b+c)$
Deoarece *3/(99a+9b),* deducem că *3/* $\overline{abc}$ dacă şi numai dacă *3/(a+b+c).* Q.e.d.

● Cu ajutorul cuburilor identice putem introduce operaţia de ridicare la putere şi noţiunile de număr natural pătrat perfect sau număr natural cub perfect.

Exemplul 5.

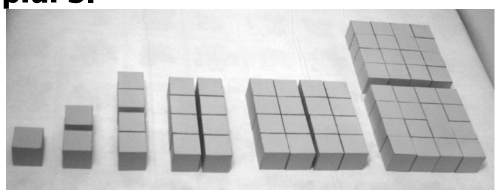


Fig.11.

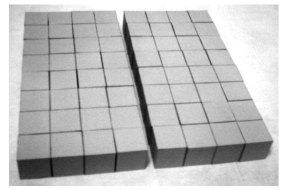



Fig.12.

Prin convenţie notăm un cub cu 2^0 şi două cuburi cu 2^1. Dublând două cuburi obţinem $2\cdot 2$ cuburi şi notăm $2\cdot 2=2^2$. Dublând cele 2^2 cuburi obţinem $2^2\cdot 2$ cuburi şi notăm $2^2\cdot 2 = 2\cdot 2\cdot 2=2^3$. Dublând cele 2^3 cuburi obţinem $2^3\cdot 2$ cuburi şi notăm $2^3\cdot 2=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4$. Continuând procedeul obţinem succesiv numerele 2^5 şi 2^6. Am prezentat astfel primele şapte puteri cu exponent natural ale lui 2 (fig.11 şi fig.12).

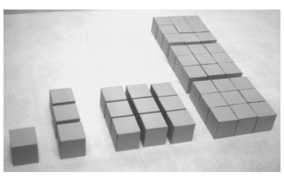


Fig.13.

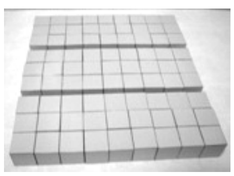



Fig.14.

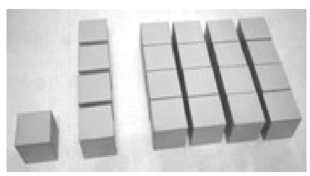



Fig.15.

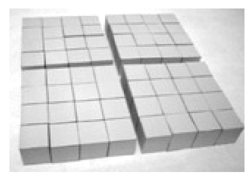



Fig.16.

Prin convenţie notăm un cub cu 3^0 şi trei cuburi cu 3^1. Triplând trei cuburi obţinem $3\cdot 3$ cuburi şi notăm $3\cdot 3=3^2$. Triplând cele 3^2 cuburi obţinem $3^2\cdot 3$ cuburi şi notăm $3^2\cdot 3=3\cdot 3\cdot 3=3^3$. Triplând cele 3^3 cuburi obţinem $3^3\cdot 3$ cuburi şi notăm $3^3\cdot 3=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4$. Obţinem astfel primele cinci puteri naturale ale lui 3 (fig.13 şi fig.14).

Prin convenţie notăm un cub cu 4^0 şi patru cuburi cu 4^1. Multiplicând de patru ori 4 cuburi obţinem $4\cdot 4$ cuburi şi notăm $4\cdot 4=4^2$. Multiplicând de 4 ori cele 4^2 cuburi obţinem $4^2\cdot 4$ cuburi şi notăm $4^2\cdot 4 = 4\cdot 4\cdot 4 = 4^3$. Obţinem astfel primele patru puteri cu exponent natural ale lui 4 (fig.15 şi fig.16) .

Dacă avem la dispoziţie 125 de cuburi identice putem pune în evidenţă şi următoarele puteri: 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 6^0, 6^1, 6^2, 7^0, 7^1, 7^2, 8^0, 8^1, 8^2, 9^0, 9^1, 9^2, 10^0, 10^1 şi 10^2.

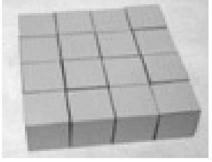


Fig.17.

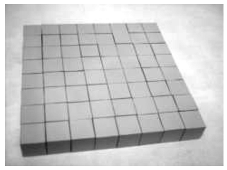



Fig.18.

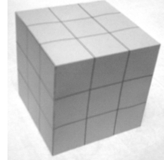



Fig.19.

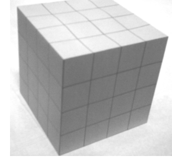



Fig.20.

Putem observa că 16 cuburi pot fi aşezate astfel încât să formeze un corp cu un singur strat de cuburi, în care numărul liniilor este egal cu numărul coloanelor (fig.17). Acelaşi lucru îl putem constata la 64 de cuburi (fig.18). Spunem că 16 şi 64 sunt numere naturale pătrate perfecte ($16=4^2$, $64=8^2$).

Putem observa de asemenea că 27 de cuburi pot fi aşezate astfel încât să formeze un cub mai mare (fig.19). Acelaşi lucru îl putem constata la 64 de cuburi (fig.20). Spunem că 27 şi 64 sunt numere naturale cuburi perfecte ($27=3^3$, $64=4^3$).

● Putem introduce unele formule de calcul algebric cu ajutorul unor corpuri formate din cuburi, cu unul sau mai multe straturi.

Exemplul 6.

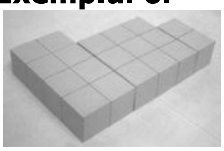


Fig.21.

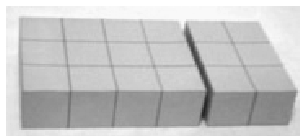


Fig.22.

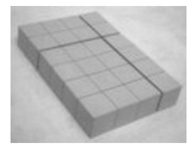


Fig.23.

Observaţia 1. Pentru a număra rapid câte cuburi sunt într-un corp format dintr-un singur strat cu linii şi coloane complete, facem produsul dintre numărul liniilor şi numărul coloanelor. De exemplu, pentru a număra cuburile din fig.21 descompunem ansamblul în trei corpuri cu linii şi coloane complete apoi însumăm numărul cuburilor celor trei componente. Obţinem: $4\cdot2+3\cdot3+2\cdot1=19$ cuburi.

Folosind astfel de corpuri putem pune în evidenţă distributivitatea înmulţirii faţă de adunare/ scoaterea factorului comun şi regula de efectuare a produsului a două sume.

În fig.22 sunt $3\cdot(4+2) = 3\cdot4+3\cdot2 = 18$ cuburi, iar în fig.23 sunt $(4+2)\cdot(3+1) = 4\cdot3+4\cdot1+2\cdot3+2\cdot1=24$ cuburi. Putem generaliza aceste rezultate cu ajutorul formulelor: $a(b+c) = ab+ac$ şi $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.

Observaţia 2. Pentru a număra rapid câte cuburi sunt într-un corp format din straturi identice, fiecare strat având linii si coloane complete, facem produsul dintre numărul liniilor (de pe un strat), numărul coloanelor (de pe un strat) şi numărul straturilor. De exemplu, corpul din fig. 24 are 3 linii şi 4 coloane, pe două straturi, deci conţine $3\cdot4\cdot2 = 24$ cuburi.

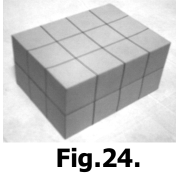


Fig.24.

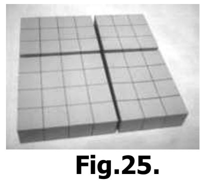


Fig.25.

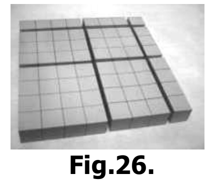


Fig.26.

Exemplul 7. Numărul cuburilor din fig.25 poate fi exprimat prin: $(4+3)^2=4^2+2\cdot(4\cdot3)+3^2$. Egalitatea anterioară este un caz particular al formulei $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Numărul cuburilor din fig. 26 poate fi exprimat prin: $(4+3+1)^2=8^2$ sau $(4+3+1)^2=4^2+3^2+1^2+2\cdot(4\cdot3)+2\cdot(4\cdot1)+2\cdot(3\cdot1)$. Egalitatea anterioară este un caz particular al formulei $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Exemplul 8.

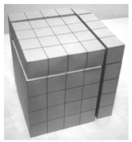


Fig.27.

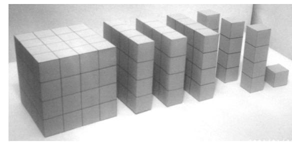


Fig.28.

Numărul cuburilor din fig.27 şi fig.28 poate fi exprimat prin $(4+1)^3=5^3$ sau

$$(4+1)^3=4^3+3\cdot(4^2\cdot1)+3\cdot(4\cdot1^2)+1^3. \qquad (1)$$

Egalitatea (1) este un caz particular al formulei $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

● Cu ajutorul cuburilor identice putem introduce conceptul de măsurare a volumului unui corp.

Exemplul 9.

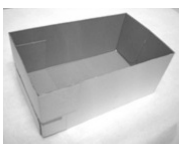


Fig.29.

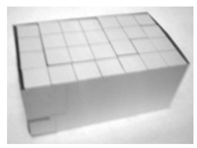


Fig.30.

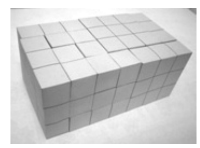


Fig.31.

Alegem ca unitate de măsură pentru volumul unui corp volumul unui cub din set (cu muchia de 5 cm) . Dacă notăm cu 1u lungimea muchiei acestuia atunci vom nota volumul său cu $1u^3$. Pentru a afla volumul unei cutii numărăm câte cuburi cu volumul $1u^3$ încap în cutie. De exemplu, deoarece în cutia din fig.29 încap $7\cdot4\cdot3=84$ cuburi, spunem că volumul cutiei, măsurat cu unitatea de măsură aleasă, este $84u^3$. Deoarece $84u^3=7u\cdot4u\cdot3u$ deducem că volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul măsurilor celor trei dimensiuni: lungime, lăţime şi înălţime. Deoarece cubul este un paralelipiped dreptunghic care are cele trei dimensiuni egale deducem că volumul unui cub este egal cu lungimea muchiei ridicată la puterea a treia.

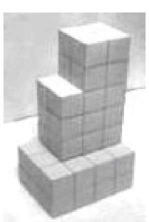


Fig.32.

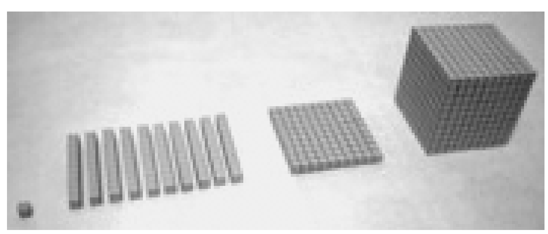


Fig.33.

Pentru a exprima volumul corpului din fig.32 îl descompunem în trei corpuri cu straturi identice şi însumăm numărul cuburilor de volum $1u^3$ ce alcătuiesc cele trei componente. Obţinem volumul total:

$$3u\cdot4u\cdot2u+2u\cdot3u\cdot3u+(2u)^3=24\,u^3+18\,u^3+8\,u^3=50\,u^3\ .$$

Dacă alegem ca unitate de măsură pentru volum un cub cu muchia de lungime 1dm, atunci volumul acestuia este $(1dm)^3=1dm^3$.

Volumul cutiei din fig.29 exprimat în dm^3 este de $10\frac{1}{2}\,dm^3=10{,}5\ dm^3$, deoarece în cutie încap 10 cuburi cu volumul 1 dm^3 şi jumătate dintr-un astfel de cub.

Dacă alegem ca unitate de măsură pentru volumul unui corp un cub cu muchia de lungime 1cm, atunci volumul acestuia este $(1cm)^3=1cm^3$. Deoarece într-un cub cu muchia de 10 cm încap 10 straturi de câte 100 de cuburi cu volumul $1cm^3$, putem scrie $1dm^3=(10cm)^3=1000\ cm^3$ (fig.33). Atunci volumul cutiei din fig.29 poate fi exprimat şi prin $(10{,}5\cdot1000)\ cm^3=10500\ cm^3$.

Cu ajutorul corpurilor din fig.33 pot fi puse în evidenţă primele patru puteri cu exponent natural ale lui 10. De asemenea putem ilustra fracţii ordinare, fracţii zecimale finite şi procente.

● Putem folosi cuburile şi pentru a prezenta cazuri particulare ale unor sume remarcabile.

Exemplul 10.

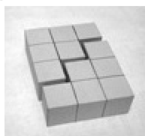


Fig. 34.

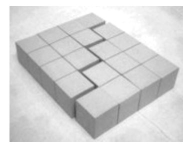


Fig. 35.

Aranjarea cuburilor ca în fig.34 sugerează relaţia:

$$1+2+3=\frac{3\cdot(3+1)}{2}, \tag{2}$$

iar cea din fig.35 ne conduce la egalitatea:

$$1+2+3+4=\frac{4\cdot(4+1)}{2}. \tag{3}$$

Relaţiile (3) şi (4) sunt cazuri particulare ale egalităţii:

$$1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2},\ \text{oricare ar fi } n \text{ număr natural nenul.} \tag{4}$$

<u>Demonstraţia egalităţii (4)</u>. (clasa a V-a)
Fie n număr natural nenul.
$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$
$S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$
$2S=(n+1)+(n+1)+\ldots\ldots+(n+1)$, n paranteze.
Din $2S=n(n+1)$ obţinem $S=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Q.e.d.

Exemplul 11.

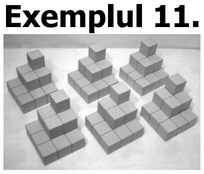


Fig.36.


Fig.37.

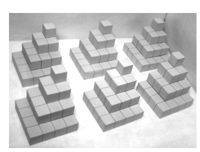


Fig.38.

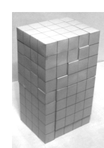


Fig.39.

Dacă asamblăm cele 6 corpuri din fig.36 obţinem corpul din fig.37. Deci putem scrie egalităţile

$$1^2+2^2+3^2=\frac{3\cdot4\cdot7}{6}=\frac{3\cdot(3+1)\cdot(2\cdot3+1)}{6}. \tag{5}$$

De asemenea, dacă asamblăm cele 6 corpuri din fig.38 obţinem corpul din fig.39 şi putem scrie egalitatăţile

$$1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{4\cdot5\cdot9}{6}=\frac{4\cdot(4+1)\cdot(2\cdot4+1)}{6}. \tag{6}$$

Relaţiile (5) şi (6) sunt cazuri particulare ale egalităţii

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6},\ n\in\mathbf{N}. \tag{7}$$

<u>Demonstraţia egalităţii (7)</u> (clasa a IX-a)

Folosim metoda inducţiei matematice.

P(n): $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$, oricare ar fi n număr natural nenul.

P(1): $1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$, propoziţie adevărată.

Presupunem că *P(k)* este adevărată (*k* număr natural nenul) şi demonstrăm că $P(k)\Rightarrow P(k+1)$, oricare ar fi *k* număr natural nenul.

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Exemplul 12.

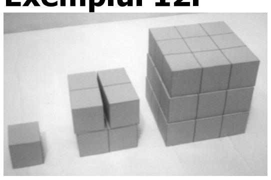


Fig.40.

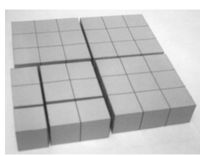


Fig.41.

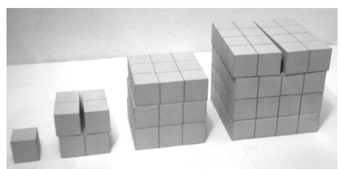


Fig.42.

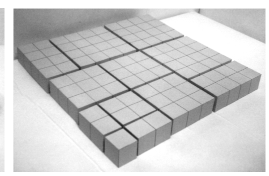


Fig.43.

Cuburile din fig.40 pot fi aşezate într-un singur strat ca în fig.41. Acest aranjament ne sugerează relaţia

$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2.$$

Din aceasta deducem că

$$1^3+2^3+3^3=\left[\frac{3\cdot(3+1)}{2}\right]^2. \tag{8}$$

În mod asemănător putem aşeza cuburile din fig.42 obţinând stratul din fig.43 şi egalitatea:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2.$$

Din aceasta deducem că

$$1^3+2^3+3^3+4^3=\left[\frac{4\cdot(4+1)}{2}\right]^2. \tag{9}$$

Relaţiile (8) şi (9) sunt cazuri particulare ale egalităţii

$$1^3+2^3+...+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2,\ n\in\mathbf{N}. \tag{10}$$

Exemplul 13.

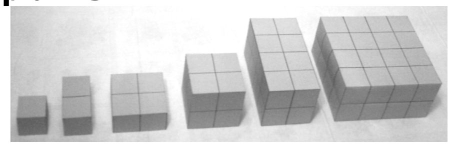


Fig. 44.

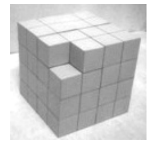


Fig.45.

Dacă punem laolaltă cuburile ce ilustrează primele şase puteri cu exponent natural ale lui 2 (fig.44) obţinem 2^6-1 cuburi (fig.45). Aşadar avem egalitatea:

$$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5=\frac{2^6-1}{2-1}. \qquad (11)$$

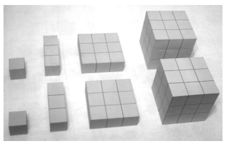


Fig.46.

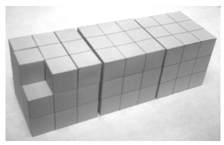


Fig.47.

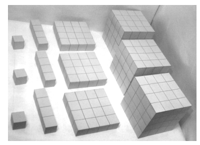


Fig.48.

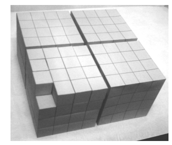


Fig.49.

Dacă multiplicăm de două ori toate corpurile ce ilustrează puterile 3^0,3^1,3^2 şi 3^3 (fig. 46) şi le punem laolaltă, obţinem 3^4-1 cuburi (fig.47).

Aşadar, avem următoarea egalitate :

$$2\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3=3^4-1.$$

Împărţind ambii membri ai egalităţii la 2 obţinem:

$$3^0+3^1+3^2+3^3=\frac{3^4-1}{3-1}. \qquad (12)$$

Dacă multiplicăm de trei ori toate corpurile ce ilustrează puterile 4^0, 4^1, 4^2 şi 4^3 (fig. 48) şi le punem laolaltă obţinem 4^4-1 cuburi (fig. 49). Aşadar, avem:

$$3\cdot 4^0+3\cdot 4^1+3\cdot 4^2+3\cdot 4^3=4^4-1$$

$$4^0+4^1+4^2+4^3=\frac{4^1-1}{4-1}. \qquad (13)$$

Egalităţile (11), (12) şi (13) sunt cazuri particulare ale relaţiei care exprimă suma primelor *n* puteri cu exponent natural ale numărului natural *a*, şi anume :

$$1+a+a^2+...+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}, \qquad (14)$$

oricare ar fi *a* număr natural, $a\geq 2$ şi oricare ar fi *n* număr natural nenul.

Demonstraţia relaţiei (14). *(clasa a V-a)*

Fie *a* un număr natural, $a\geq 2$ şi fie *n* un număr natural nenul.

S=$1+a+a^2+...+a^{n-1}$. Înmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu *a* obţinem: *aS*=$(a+a^2+...+a^{n-1})+a^n$. Deci *aS*=a^n+*S*-1. Scăzând *S* din ambii membrii ai ultimei egalităţi obţinem *S(a-1)=* a^n -1. Deci $S=\frac{a^n-1}{a-1}$. Q.e.d.

Exemplul 14.

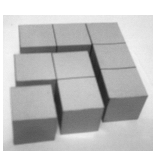


Fig.50.

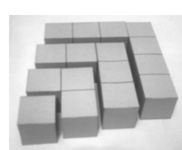


Fig.51.

Aşezarea cuburilor din fig.50 sugerează relaţia $1+3+5=3^2$ (15), iar cea din fig.51 conduce la egalitatea: $1+3+5+7=4^2$ (16).
Relaţiile (15) şi (16) sunt cazuri particulare ale egalităţii

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2,\ n\in\boldsymbol{N}. \tag{17}$$

<u>*Demonstraţia egalităţii (20).*</u> *(clasa a V-a)*
Fie n număr natural nenul.

$S = 1 + 3 + \ldots + (2n-3) + (2n-1)$

$S = (2n-1) + (2n-3) + \ldots + 3 + 1$

$2S = 2n + 2n + \ldots + 2n + 2n$, ($n$ termeni egali cu $2n$).

Din $2S=2n\cdot n$ obţinem $S=n^2$. Q.e.d.

Exemplul 15.

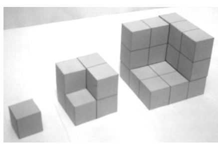


Fig.52.

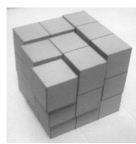


Fig.53.

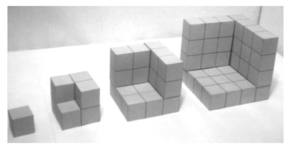


Fig.54.

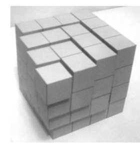


Fig.55.

Dacă asamblăm corpurile din fig.52 obţinem cubul din fig.53 . Deci putem scrie egalitatea

$$1+7+19=3^3\ . \tag{18}$$

Din fig.54 şi fig.55 deducem egalitatea

$$1+7+19+37=4^3. \tag{19}$$

Relaţiile (18) şi (19) sunt cazuri particulare ale egalităţii

$$1+7+\ldots+(3n^2-3n+1)=n^3,\ n\in\boldsymbol{N}. \tag{20}$$

4. Concluzii

Materialele didactice prezentate în acest articol pot fi folosite în multe lecţii de matematică, la clasele V-IX, atât pentru introducerea unor concepte matematice noi cât şi pentru consolidarea şi verificarea acestora.

Cu un singur set de astfel de materiale didactice se pot face demonstraţii în faţa clasei sau lucra în grup, prin rotaţie. Ideal ar fi ca un profesor de matematică să aibă cel puţin patru astfel de seturi de materiale didactice (cel puţin 400 de cuburi din carton, cu muchia de 5 cm, necesare pentru patru grupe a câte patru-cinci elevi).

Majoritatea elevilor mei lucrează cu plăcere cu aceste materiale didactice. Mulţi dintre ei compun probleme noi şi generalizează rezultatele obţinute cu destul de mare uşurinţă. Folosirea materialelor didactice face matematica mai accesibilă şi mai atractivă.

Mulţumesc domnului lector dr. Cristian Voica pentru pentru discuţii pertinente în subiectul lucrării.

Bibliografie

[1] Luria, S.I. , *Arhimede,* Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1958.
[2] Singer, M., Radu, M., Ghica , I., Drugan, G., Puican, F., Stănciulescu, I., *Manual de matematică pentru clasa a V-a* , Ed. Sigma, Bucureşti, 2005.
[3] Singer, M. , Voica, C. , Voica, C. , *Manual de matematică pentru clasa a VIII-a*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2005.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 27-29

STRATEGII ALE JOCURILOR LOGICE

Neculae DINUŢĂ
Universitatea din Piteşti

STRATEGIES IN LOGIC GAMES

ABSTRACT. A logic game assumes at least two partners; the main objective of a logic game is to win. In this line of thoughts, we present some wining strategies for the *ten numbers game* and for some magical squares of order three and four.

1. Introducere

Noile cerinţe ale învăţământului preuniversitar impun accentuarea caracterului formativ al procesului instructiv educativ. Astfel, pe lângă stăpânirea conceptelor de bază, important este ca elevii să dovedească în ce măsură stăpânesc instrumentele de muncă intelectuală. De aceea este utilă folosirea tuturor metodelor şi formelor specifice matematicii pentru exersarea gândirii creatoare, pentru realizarea transferului de cunoştinţe, pentru dezvoltarea gândirii logice şi a capacităţilor de analiză şi sinteză. Problemele logico-matematice se referă la situaţii din viaţa socială, iar rezolvarea lor se face prin aplicarea raţionamentului logico-deductiv şi a unor raţionamente matematice subtile. În această categorie se înscriu şi jocurile logice care sunt folosite destul de rar chiar dacă valenţele formative sunt foarte importante.

Jocurile logice, prin conţinutul lor, presupun existenţa a cel puţin doi parteneri iar ca obiectiv fundamental, câştigarea acestuia. În foarte multe cazuri însă nu sunt parteneri umani iar situaţiile conflictuale se regăsesc în conţinutul propriu-zis, motiv pentru care sunt numite *jocuri împotriva naturii*.

Într-un astfel de joc drumul parcurs de fiecare jucător pentru realizarea obiectivului propus se numeşte strategic. Indiferent de tipul jocului logic şi de complexitatea sa este foarte importantă alegerea variantei de urmat deoarece este posibilă depistarea unor obstacole şi mai ales diminuarea lor.

Multe din jocurile logice au la bază folosirea mai multor strategii şi de aceea putem considera mai mulţi parteneri umani. Un astfel de joc poate fi folosit cu eficienţă atât la clasele primare cât şi în ciclul gimnazial şi este asemănător jocului *remmy matematic* în care oricine poate fi câştigător, şansa depinzând de înâmplare şi de strategia urmată. În cele ce urmează vom prezenta două jocuri care se pot folosi atât în învăţământul primar cât şi în cel gimnazial.

2. Jocul celor 10 numere

Se consideră 40 de cartonaşe de dimensiuni mai mici pe care se înscriu numerele de la 1 la 10 de patru ori şi pe o foaie de hârtie se desenează un pătrat format din 4x4=16 pătrăţele care să poată încadra fiecare cartonaş.

Acest joc poate fi jucat în acelaşi timp de mai mulţi parteneri care şi-au confecţionat fiecare cele 40 cartonaşe şi pătratul respectiv. Se amestecă bine cele 40 cartonaşe după care se ia la rând câte unul dintre ele şi se fixează într-un pătrăţel mic, nemaiputând fi mişcat, şi aşa mai departe până sunt completate cele 16 pătrăţele. Pentru acumularea unui punctaj maxim fiecare jucător încearcă să obţină cât mai multe numere de acelaşi fel pe liniile orizontale şi verticale care vor multiplica de 2 ori, de 3 ori sau 4 ori valoarea numărului respectiv. De asemenea, atât pe liniile orizontale cât şi pe cele verticale nu se vor însuma decât numerele aşezate în ordine crescătoare sau descrescătoare.

Privitor la strategia de urmat, în acest joc putem evidenţia că fiecare jucător încearcă să completeze mai întâi pătrăţele centrale după care fiecare cartonaş extras le dă posibilitatea să aleagă linia orizontală sau cea verticală care-i avantajează. Sunt jucători care completează diagonala principală după care păstrează dezvoltări pe liniile orizontale şi verticale. Pentru corectitudine este bine să existe un observator care să vegheze la aşezarea cartonaşelor şi, mai ales, la a nu fi modificate poziţiile iniţiale. Chiar dacă şansa este foarte imporatntă în obţinerea unor dezvoltări optime, sunt multe strategii care pun jucătorul în situaţii avantajoase.

Acest joc poate fi modificat, în funcţie de eşantionul de elevi la care ne adresăm şi în funcţie de vârsta pe care o au. Astfel folosit la clasele I-II se vor lua numai 5 sau 6 cifre care vor fi aşezate pe un pătrat format din 3x3=9 pătrăţele, regulile jocului putând fi modificate în funcţie de obiectivele urmărite.

3. Pătratele magice

Acest joc contribuie la dezvoltarea gândirii logice, la stimularea creativităţii şi dezvoltarea proceselor intelectuale.

Prin pătrat magic de ordinul n înţelegem un pătrat format din $nxn=n^2$ pătrăţele care vor fi completate cu numerele naturale de la 1 la n^2 astfel încât suma numerelor de pe liniile orizontale, liniile verticale şi de pe diagonale să fie aceeaşi. Pentru început se va pleca de la pătratele magice de ordinul 3. Astfel dacă luăm pătratul magic:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

se va observa că sumele pe liniile orizontale, pe cele verticale şi pe diagonale sunt aceleaşi, şi anume 15.

Numerele pare 2, 4, 6, 8 sunt plasate în colţurile pătratului, cele impare 1, 3, 7, 9 la mijlocul fiecărei linii şi coloane şi numărul 5 este plasat în centrul pătratului participând la patru sume. Atunci când vrem să obţinem şi alte pătrate magice de ordinul 3 se pun următoarele întrebări:

- sumele pe liniile verticale, orizontale şi diagonale sunt şi altele diferite de 15 ?
- putem plasa şi numerele impare în colţurile pătratului ?

Pentru obţinerea răspunsurilor corespunzătoare este bine să ne construim un pătrat format din 3x3=9 pătrăţele şi să confecţionăm 9 cartonaşe mai mici pe care să înscriem numerele de la 1 la 9. Prin această metodă putem obţinem toate configuraţiile care ni se par optime iar modificările se pot face imediat. Totdeauna încercările pe cont propriu motivează pe jucător şi îi dau posibilitatea exersării prin propria imaginaţie a căilor considerate bune. Strategia urmată de fiecare jucător îl face ca după o serie de încercări să elimine variantele care blochează obţinerea sumelor corecte şi chiar să ajungă să arate că pătratele magice de ordinul 3 nu pot avea sumele pe liniile orizontale, verticale şi diagonale decât 15. Prin plasarea numerelor 2, 4, 6, 8 numai în 8 moduri se poate spune că există opt pătrate magice de ordinul trei. De asemenea sumele pe liniile orizontale, verticale şi diagonale respectă formula: $S=[n(nxn+1)]:2$ care va fi dată atunci când există această posibilitate.

După studierea acestor pătrate magice de ordinul 3 vom extinde studiul pătratelor magice de ordinul patru. Vom pleca de la un exemplu în acest sens şi anume putem prezenta pătratul magic al lui Dürer.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Prin studierea acestui pătrat magic se observă că numerele pare şi impare nu mai respectă condiţiile pătratului magic de ordinul trei, iar suma elementelor în acest caz este 34 şi respectă formula dată. Cu cât creşte numărul pătrăţelelor de la 9 la 16 şi posibilităţile de obţinere a pătratelor magice este mai mare. Nu ne putem pune problema găsirii numărului de pătrate magice care se pot obţine deoarece este destul de greu de găsit această relaţie la nivelul învăţământului primar şi gimnazial.

Astfel putem cere elevilor să vină cu alte pătrate magice de ordinul patru şi să prezinte o serie de strategii pe care le-au folosit pentru obţinerea lor.

Prin jocurile logice prezentate vrem să dăm o nouă posibilitate de exersare a configuraţiilor numerice care pot consolida o serie de concepte matematice, pot stimula funcţiile proceselor intelectuale şi pot dezvolta cele două operaţii ale gândirii: analiza şi sinteza.

Bibliografie

[1] Constantinescu, P., *Jocuri şi probleme distractive* , Ed. Albatros, Bucureşti, 1971.
[2] Conway, J., *On numbers and games* , Academic Press, London , New York, 1976.
[3] Gardner, M., *Amuzamente matematice*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1968.
[4] S.S.M.R., *Jocuri şi probleme didactice de matematică*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1965.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 30-32

CUM A FOST CONTESTATĂ PROPAGAREA RECTILINIE A LUMINII

Monica- Gabriela GRUIA
Şcoala nr.1. *Liviu Rebreanu* - Mioveni, Argeş

HOW THE RECTILINEAR PROPAGATION OF LIGHT WAS CONTESTED

ABSTRACT. The main arguments that conducted to the contestation of the idea on the rectilinear propagation of light by the relativity theory is synthetically presented. From the mathematical point of view, the proof consists in applying some properties of squared functions and trigonometric formulas and approximations. The story can be a challenge for students interested in applied mathematics.

Se ştie că lumea în care trăim este materială. Aceasta înseamnă că în universul infinit nu exista loc care să nu fie umplut cu materie. Materia se prezintă sub două aspecte: substanţa si câmpul. Acolo unde nu întrezărim corpuri materiale, nu înseamnă că locul este ocupat de vid. Dimpotrivă, şi aici există materie, dar sub formă de câmpuri (câmpuri gravitaţionale, electromagnetice etc.). Prezenţa materiei implică existenţa spaţiului şi timpului ca nişte însuşiri ale sale.

Teoria modernă, care priveşte spaţiul, timpul şi materia ca formând o unitate, este cunoscută sub numele de *Teoria relativităţii generalizate* şi a fost elaborată de savantul Albert Einstein în anul 1916. Una dintre concluziile calitative ale acestei teorii este: masa schimbă structura spaţiului şi timpului prin însăşi prezenţa sa.

Să presupunem că ar exista un spaţiu complet lipsit de materie, deci un spaţiu vid; în acest spaţiu drumul cel mai scurt între doua puncte este o linie dreaptă. In consecinţă, orice corp care ar intra în acest spaţiu s-ar mişca rectiliniu.

În continuare să considerăm că în această regiune ar exista un singur corp cu o masă considerabilă. Simpla prezenţă a unui asemenea corp poate modifica geometria spaţiului, curbându-l. Acum linia cea mai scurt posibilă între două puncte este o curbă; un alt corp introdus în acest spaţiu, cu o viteza iniţială, se va mişca după o curbă. Deci spaţiul se comportă de parcă ar fi *încovoiat* în jurul primei mase. Este ca şi cum ne-am deplasa pe o sferă şi drumul cel mai scurt dintre două puncte ar fi desigur o curbă.

Pentru a lămuri mai bine afirmaţiile de mai sus vom da un exemplu referitor la o experienţă care a confirmat strălucit veridicitatea teoriei relativităţii generalizate, indicând, în acelaşi timp, că teoria lui Newton despre gravitaţie rezumată în formula $F=Km_1m_2/r^2$ constituie un caz particular al acestei teorii.

Exemplul se referă la o rază de lumină care vine de la o stea. Noi spunem, în mod obişnuit, că această rază este o linie dreaptă. Einstein a arătat, însă, că această rază se curbează când trece pe lângă o masă mare, cum ar fi, de exemplu Soarele.

Explicaţia fenomenului rezidă în faptul că lumina este constituită din particule, numite fotoni, care au masă de mişcare, deplasându-se cu o viteza de 300 000 km/s. Acestea intră în interacţiune cu câmpul gravitaţional al Soarelui şi, astfel, sunt influenţate în traiectoria lor. Cu alte cuvinte, în jurul maselor mari (Soarele) razele de lumină nu mai trec în linie dreaptă, ci se curbează uşor.

Intr-o scrisoare adresată de un grup de fizicieni din Zűrich lui Einstein se aflǎ celebrele versuri: *E curbǎ raza stelei ce vine de departe/ De slavǎ Albert Einstein în veci avea-va parte.*

Să punem acum în evidenţă şi printr-o demonstraţie, destul de aproximativă, aceasta forţă de interacţiune dintre lumină şi câmpul gravitaţional. Ne propunem să calculăm deviaţia razei de lumină în vecinătatea Soarelui, deoarece câmpul său gravitaţional este mult mai mare decât al Pământului şi anume de ~28 ori.

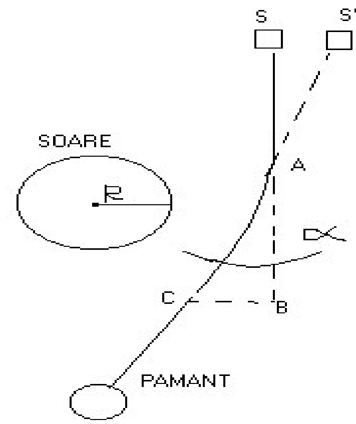


Fig. 1.

Raza de lumină, constituită din fotoni, ajunsă în vecinătatea Soarelui, se comportă ca un corp care, având o viteză iniţială, va *cădea* spre acesta într-o mişcare uniform accelerată(vezi figura).

Notând distanţa $AB = 2R_0$ ($R_0=7\cdot10^8$ m) în care $2R_0$ reprezintă diametrul Soarelui, constatăm că lumina poate să străbată rectiliniu acest drum în timpul

$$t = \frac{AB}{c} = \frac{14\cdot10^8 m}{3\cdot10^8 m} = 5s\,, \tag{1}$$

(c – viteza luminii), aflându-se în tot acest timp în câmpul gravitaţional al Soarelui. În acest timp fotonii care compun raza de lumină vor *cădea* liber pe distanţa BC, conform formulei

$$BC = \frac{g_1 t^2}{2}, \tag{2}$$

în care g_1 reprezintă acceleraţia căderii libere spre Soare.

Aceasta poate fi determinată egalând forţa de atracţie dintre masa M a Soarelui şi masa m a unui corp aflat în vecinătatea sa ($M = 2\cdot10^{30}$kg), adică

$$F = k\cdot\frac{M\cdot m}{R_0^2}. \tag{3}$$

Dar

$$G = F \Rightarrow m\cdot g_1 = \frac{M\cdot m}{R_0^2}\cdot k \tag{4}$$

Din relaţia (4) găsim

$$g_1 = k\cdot M/ R_0^2, \tag{5}$$

în care $k = 6{,}67\cdot 10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, reprezentând constanta atracţiei universale. Înlocuind în relaţia (5) , vom obţine $g_1 = 272\text{m/s}^2$.

Revenind la formula (2) şi înlocuind, obţinem

$$\frac{g_1 t^2}{2} BC = \frac{2{,}72\cdot10^2\, m/s^2\cdot(5s)^2}{2} \approx 3\cdot10^3 m.$$

Unghiul de deviaţie al razei de lumină cauzat de câmpul gravitaţional al Soarelui poate fi determinat din triunghiul dreptunghic *ABC* şi anume (în fig. 1)

$$BC = AB\, tg\, a\,,$$

dar *a* fiind foarte mic se consideră $tga \approx a$, şi vom avea

$$\frac{BC}{AB} = a = \frac{3 \cdot 10^{3} m}{7 \cdot 10^{8} m} = 43 \cdot 10^{-7} rad = 0{,}9^{''}.$$

Valoarea lui *a* calculată de Einstein pe baza principiului relativităţii generalizate este de aproape două ori mai mare, şi anume *a* = 1,75”.

Să vedem dacă previziunile teoretice au putut să fie verificate experimental.

Lucrul acesta s-a întâmplat în anul 1919, cu ocazia unei eclipse de Soare, care a avut loc pe coastele Oceanului Atlantic (între Brazilia şi Africa de Vest).

Încă din 1917, Societatea Regală de Ştiinţe din Londra pusese la cale această verificare. În acei ani, Anglia şi Germania erau în război şi ambiţiile se răsfrângeau şi pe plan ştiinţific: erau puse în competiţie justeţea teoriei englezului Newton sau a germanului Einstein (care era pe atunci profesor la Berlin).

Astronomii de la Oxford s-au instalat la Sobral, în nordul Braziliei, iar cei de la Greenwich – în insulele Principe. S-au luat o serie de fotografii în timpul celor cinci minute cât a durat faza totală a eclipsei, fixându-se poziţia unor stele din vecinătatea Soarelui. După două luni, stelele au fost fotografiate din nou noaptea, cu aceleaşi aparate pentru a prinde pe placa fotografică poziţia stelelor în absenţa Soarelui. Consecinţa: efectul prezis de Einstein a fost confirmat în mod strălucit.

În şedinţa care a urmat după epocalul eveniment, la care prezida Sir J.J. Thomson, unul din cei mai mari fizicieni ai timpului, s-au citit rezultatele obţinute de ambele expediţii:

- în Golful Sobral: $a_1 = 1^{''}\,98$
- în Insula Principe : $a_2 = 1^{''}61$
- valoarea medie: $a_m = 1^{''}\,79$
- valoarea prezisă de Einstein: $a = 1^{''}\,75$.

Se spune că Einstein, când a aflat acest lucru din partea unei persoane străine, care l-a vizitat în acea perioadă la Berlin, i-a răspuns surâzând: *nu m-am aşteptat la altceva.*

Câteva decenii mai târziu, în anul 1962, deviaţia fotonilor în câmpuri gravitaţionale intense a putut fi măsurată şi în condiţii terestre în laboratorul Cavendich, datorită fenomenului numit *efect Mössbauer*, descoperit în anul 1952.

Bibliografie

[1] Boiu, A., *Paradoxuri celebre, enigme şi curiozităţi ale naturii şi ştiinţei*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1981.

[2] Langevin, P., *Gândire şi acţiune*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1971.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 33-34

SYSTEMS OF COMPUTERIZED MATHEMATICS IN THE TEACHING PROCESS

Veronica MARIN
C.C.F. Industrial School Group
Piteşti, Romania

Violeta OSIPOV
Assistant Professor
Technical University of Moldova, Chişinău

ABSTRACT. We review some specialized programs that can be used to solve scientific problems. These programs are helpful in the teaching process, allowing to rapidly solve a variety of problems, as linear and diferential equations, functions representations, geometry visualizations.

The computer, an invention of the last century, changed many fields of activity, including the way of living of many people. If it wasn't for this *intelligent* invention, the solving of the most difficult problems wouldn't be possible: problems that influenced the economic development, contributing in this way to the saving of not only financial resources but of time too. The last in this list is extremely important to people interested in scientific research, teachers and mostly pupils and students.

In our countries artificial intelligence in education is not very much developed. This can be justified by diverse objective reasons: high costs of hardware and software. But very often one can feel the influence of subjective factors, that don't permit to undertake anything particular; as it were for the Romanian education being already advanced (pupils and students get high results at different international contests).

Regretfully it comes out that a large part of the teaching and leading staff, who have the obligation to take decisions, still have to be convinced of the role of modern systems of mathematics without giving up to the fundamental principles of classical education; that this means are able to change in a qualitative way the understanding, approach and teaching methods of the subjects in the curriculum; that they are capable of making the teaching process more attractive and accessible and finally much more interesting and efficient for those whom we have the duty to teach.

It is known that the appearance of computers was possible due to the need of performing large calculations; afterwards the computer was used for solving problems from different fields of economy, of the most industrially developed countries.

Scientific calculations are still dependent on computers' appearance. There were founded libraries of calculation programs, especially written in FORTRAN. These programs could allow the rapid solving of different typical problems (problems in linear algebra, solving of differential equations, functions' interpreting etc.) In the last 20-25 years there appeared good systems (application programs) such as *Maple*, *Mathematica*, *Mathcad*, *Mathlab* etc. These systems of mathematic calculations (both numerical and symbolical) are much *friendly* with the users. Although their syntax differs, the function libraries in these systems are almost similar (including hundreds and even thousands of functions), while the intern structure and especially the algorithms, that are at the basis of these functions, don't differ, however they have some particularities. There are more similarities than differences and in this way it is easier to change to a more advanced system after getting to know the other one.

Nowadays the system *Mathematica* seems to be the most popular in the scientific sphere, especially among people interested in theory. This software has great possibilities, concerning the symbolical (analytical) transforming, but in comparison to other systems of this kind, it needs more sophisticated resources for the computer, the fact which not all the users can afford, especially those from our country.

At its turn, the system *Maple*, is a very attractive environment for making different calculations and analytical transforming, nowadays being considered the most stable from the entire list of such software. It can be used easily in such domains as: mathematics, physics, chemistry, biology, geography etc. In comparison to highly developed programming languages as FORTRAN, Basic, C and Pascal, *Maple* is capable of solving a great number of mathematical problems just introducing some commands, without writing the program for the algorithm of the solving problem. In addition, *Maple* deals in the same way with both approximate and rational numbers, the fact that leads to ideal results. The symbolic nucleus of this system is implemented to *Mathematica*, *Matlab*, *Mathcad* systems too. *Maple* just like *Mathematica* transforms the most different mathematical expressions, draws graphs, solves equations and systems of equation (linear and non linear), differential equations etc.

Similar to the application program *Mathematica* and *Mathcad*, *Matlab* also shows a high level programming language, oriented to solving mostly scientific problems. A particularity of this software is that it stores all documents in C language format.

Mathcad system is mostly used in the field of engineering. What is characteristic to this system is the way it uses the usual mathematic notes: the document on the screen looks similar to the simple mathematic calculations made by a pupil or student. For using the system there is no need to know and learn specific commands as it is with *Mathematica* system and others. The system is firstly oriented to numeric calculations, but as it was mentioned the symbolic processor of *Maple* system was implemented to this system too.

Lately, all the important manufacturers of electronic systems of mathematic calculations do much effort to integrate these systems. So, the last versions of *Mathematica* and *Maple* systems provide the possibility to visualize the programming, while in *Matlab* the library of analytical transforming taken from *Maple* is included, and *Mathcad* can work in common with *Maple*.

The solving of problems with the help of systems of computerized mathematics (SCM) is followed by very attractive and easy to use graphical pictures. Viewing the procedure of solving the problems is an advantage of SCM. That is why pupils and students using SCM can make their own model that helps deeply to understand the notions of a subject due to animation.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 35-36

LEGAREA PREDĂRII GEOMETRIEI DE PRACTICĂ

Elena NĂSTASE, **Constantin NĂSTASE**
Şcoala nr.1. *Liviu Rebreanu* Mioveni, Argeş

CONNECTING GEOMETRY TO PRACTICE

Abstract. The basic ideas of the paper are related to various techniques of teaching geometry and to the connection between geometric notions and practical activities. Some applications of geometry are presented and two examples are given.

Primele noţiuni de geometrie prezintă unele greutăţi din punct de vedere metodic, atât în ceea ce priveşte structura şi organizarea lor, cât şi metodica predării. Copiii, ca şi oamenii, la începutul procesului de cunoaştere a geometriei sunt atraşi şi interesaţi de probleme practice concrete. Învăţătorul şi profesorul introduc primele noţiuni de geometrie observând formele întâlnite în activitatea de zi cu zi. Aplicaţiile practice ale cunoaşterii încep cu primele noţiuni de aritmetică unde exemplificarea aplicaţiilor practice este directă şi relativ uşoară pentru elevi. Sunt numeroase temele de geometrie care nu au aplicaţii practice directe, ci care servesc numai pentru deducerea altora sau pentru realizarea unui mod util de gândire. Astfel, la proprietăţile patrulaterului inscriptibil întâlnim puţine aplicaţii practice directe, dar ele sunt un procedeu deosebit de valoros pentru a demonstra alte proprietăţi geometrice.

Problemele de construcţie din geometrie nu se întâlnesc în marea lor majoritate, în practică, dar constituie un important mijloc de dezvoltare a gândirii, a capacităţii de rezolvare a problemelor. Aceste cunoştinţe au un rol indirect în pregătirea elevilor pentru activitatea practică, ele dezvoltă gândirea ştiinţifică şi priceperea de a rezolva probleme, iar pe de altă parte, ele oferă posibilitatea de a dobândi conştient alte cunoştinţe care au aplicaţii practice directe. O altă categorie de probleme sunt acelea care folosesc termeni luaţi din practică sau dacă figurile pot fi constituite pe teren. Acestea sunt probleme cu conţinut practic sau probleme enunţate folosind termeni practici. Ele au un rol important pentru rezolvarea problemelor practice propriu-zise. Putem da ca exemple de probleme practice:

- aflarea unghiului a două direcţii prin vizare;
- trasarea unei linii drepte pe teren;
- aflarea unor distanţe.

Aplicaţiile practice trebuie să aibă un parcurs ascendent, ajungându-se la probleme complexe. În ciclul gimnazial, cele mai multe aplicaţii practice se folosesc de :

- capitolul geometrie;
- relaţii matematice;
- geometrie în spaţiu.

Pentru elevi, cele mai accesibile probleme sunt cele de calcul:

- aflarea unei lungimi;
- aflarea ariilor;
- aflarea laturii unui triunghi dreptunghic;
- calculul unor suprafeţe;

- calculul unui volum.

În rezolvarea problemelor de geometrie, profesorul trebuie să prezinte totdeauna probleme practice a căror rezolvare revine, din punct de vedere geometric, la rezolvarea problemelor de mai sus.

Prin rezolvarea acestui tip de probleme, elevii îşi adâncesc cunoştinţele, acestea capătă un grad de înţelegere mai mare, relaţiile geometrice trebuie desprinse şi recunoscute, din conţinutul problemei.

Legarea de practică are mai mult aspectul unei legări de concret, de realizarea obiectivă şi de activizarea elevilor conştient, direct de practica socială. Mijlocul cel mai folosit în acest scop este accentul pus pe construcţia figurilor.

Spre exemplu, la capitolul prismă, am confecţionat cu elevii, din baghete de plastic de diferite culori principalele prisme: cu baza pătrat, triunghi, hexagon, etc. în care am evidenţiat elementele principale pe care le întâlnim în problemele studiate.

Adevărul observat pe aceste mulaje este sesizat imediat pe figura de pe tablă pe care elevul o conştientizează în mod real.

Astfel, elevii intuiesc proprietăţile care apar pe figurile construite pe tablă sau caiet, le aplică în problemele care cer construcţia figurilor în anumite condiţii. Când construcţia se face pe teren, spre exemplu trasarea unui cerc, calculul perimetrului curţii şcolii, aflarea ariei laterale a sălii de clasă, a suprafeţei de parchet etc, legarea de concret este şi mai evidentă, iar înţelegerea mai profundă.

Toate aceste elemente conduc la punerea în funcţiune a mai multor analizatori, iar activitatea proprie, concretă stimulează activitatea psihică de cunoaştere a elevului.
Câteva exemple de probleme practice:

Problema 1. *Se dă un unghi pe teren. Să se împartă acest unghi în două părţi egale.*

Rezolvare. Cu ajutorul unei frânghii marcăm pe laturile unghiului pornind din vârful *O* distanţele egale *OC=OD.* Marcăm mijlocul *E* al segmentului *CD*, jalonăm dreapta *OE*, apoi concluzionăm că *[OE* este bisectoarea unghiului *AOB*.

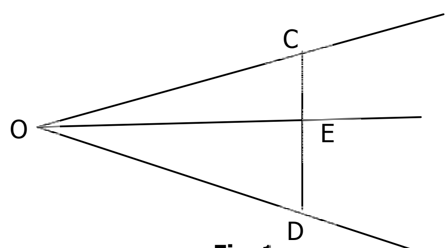


Fig. 1.

Problema 2. *Să se ducă cu ajutorul unei frânghii o perpendiculară dintr-un punct* A *pe o dreaptă* MN*.*

Rezolvare. Fixăm mijlocul frânghiei în *A* şi extremităţile ei în *B* şi *C* le fixăm pe linia *MN*. Găsim apoi mijlocul distanţei *BC*, fie acesta *O*, pe care-l unim cu punctul *A*, obţinând perpendiculara cerută.

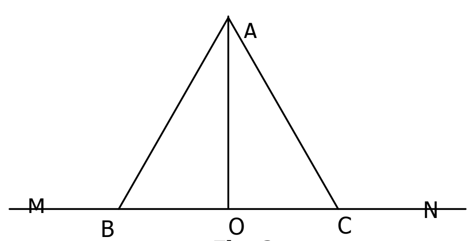


Fig. 2.

Aceste lucrări practice pe teren trebuie pregătite, mai întâi, la clasă, lucrările propriu-zise putând fi făcute în timpul unor drumeţii sau excursii, de regulă în afara orelor de curs. Pentru ca activitatea să fie încununată de succes, profesorul trebuie să îndrume în permanenţă elevii, iar rezultatele obţinute să fie analizate la clasă.

Bibliografie

[1] Bogdanov Z., Călugăriţa Gh., Opreanu E., Sandu M., *Metodica predării geometriei*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1965.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 37- 40

INEGALITĂŢI ÎN TRIUNGHI

Gherghina NICOLESCU
Şcoala nr.1 *Liviu Rebreanu* Mioveni, Argeş

INEQUALITIES IN TRIANGLES

Abstract. Some geometrical results concerning some well-known inequalities in a triangle are presented. These inequalities have an important role in solving many geometric and algebraic problems. Four theorems are formulated and by using these theorems, seven problems are proved.

Din vremuri îndepărtate, în faţa oamenilor au apărut probleme practice ce impuneau soluţii optime. Astfel de probleme apar şi astăzi în foarte multe domenii de activitate, cu preponderenţă în economie şi tehnică, referitoare la economisirea de materiale şi muncă sau în legatură cu reducerea costului produselor şi al lucrărilor dar şi cu atingerea unor parametrii calitativ superiori. Rezolvarea unor astfel de probleme implică apelarea la matematică, deci traducerea lor în limbaj matematic.

Prezenta lucrare conţine o serie de inegalităţi a căror importanţă rezultă din numeroasele posibilităţi de utilizare în practică a matematicii.

Prin rezolvarea problemelor de inegalităţi se stabilesc două relaţii de ingalitate fundamentale: relaţia de inegalitate între lungimile laturilor unui triunghi şi ca o consecinţă relaţia între lungimea perpendicularei dusă dintr-un punct exterior unei drepte pe acea dreaptă şi lungimea unei oblice dusă din acelaşi punct faţă de dreapta dată. Aceste inegalităţi au la bază teorema: *într-un triunghi, la unghiul mai mare se opune latura mai mare*, din care decurg apoi alte relaţii de inegalitate între elementele triunghiului. De asemenea, pornind de la aceeaşi teoremă, se stabilesc relaţii fundamentale de inegalitate între perpendiculara dusă dintr-un punct exterior unei drepte pe acea dreapta şi oblica dusă din acelaşi punct. Se deduc astfel relaţii între ipotenuza şi catetele unui triunghi dreptunghic, se stabileşte că *lungimea unei laturi a unui triunghi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte laturi şi mai mare decât modulul diferenţei lungimilor lor*. Dăm un exemplu de aplicare a acestor proprietăţi.

Problemele privitoare la inegalităţi în triunghi nu sunt probleme simple. În multe cazuri, elevii sunt puşi în dificultate de o astfel de problemă. În rezolvare, se poate pleca de la câteva teoreme privind inegalităţi în triunghi, pe care le enunţăm în continuare.

Teorema 1. (Teorema unghiului exterior) *Un unghi exterior al unui triunghi este mai mare decât oricare dintre unghiurile triunghiului, neadiacent cu acel unghi.*

Teorema 2. *Într-un triunghi cu două laturi necongruente, laturii cu lungimea mai mare i se opune unghiul cu măsura cea mai mare.*

Teorema 3. *Într-un triunghi cu două unghiuri necongruente, unghiului cu măsura mai mare i se opune latura cu lungimea mai mare*.

Teorema 4. *Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decât lungimea oricărei catete.*

Aplicăm aceste teoreme pentru a demonstra cîteva probleme interesante despre inegalităţi în triunghi.

Problema 1. *Într-un triunghi* ABC *în care* m($\angle$ C) < m($\angle$ B) < 90°, *considerăm înălţimea* [AD], *bisectoarea* [AE] *şi mediana* [AF] (D,E,F $\in$ (BC)). *Să se demonstreze că* AD < AE < AF.

Soluţie. Folosim figura 1. Punctul $D \in [BC$ deoarece, în caz contrar, unghiul adiacent şi suplementar unghiului $\angle ABC$ (care este unghi obtuz) ar fi un unghi al triunghiului dreptunghic ABD. Măsura acestui unghi împreună cu cea a unghiului drept ar depăşi 180°, ceea ce contravine teoremei asupra sumei unghiurilor unui triunghi.

În ΔABD avem:

$$m(\angle BAD) = 90° - m(\angle ABC) = 1/2[180° - 2\, m(\angle ABC)].$$

Cum din ipoteza avem:

$$m(\angle ABC) > m(\angle ACB)$$

deducem că

$$m(BAD) < 1/2 \cdot [180° - m(\angle ABC) + m(\angle ACB)] = ½ \cdot m(\angle BAC) - m(\angle BAE).$$

Deci D se află între B şi E, adică

$$AD < AE.$$

Pentru a dovedi a doua parte a concluziei, folosim o *construcţie ajutătoare* (fig.2.): pe semidreapta $[AF$ considerăm un punct G astfel încât $[AF] \equiv [FG]$.

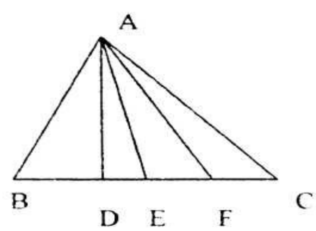


Fig.1.

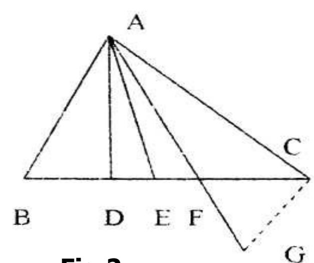


Fig.2.

Rezultă că:

$$[GF] \equiv [AF] \text{ şi } AB < AC.$$

În ΔACG avem $GC < AC$ şi $m(\angle CAG) < m(\angle AGC)$. Cum

$$m(\angle CGA) = m(\angle BAF) = m(\angle CAF) < m(\angle BAF),$$

$$m(\angle CAF) + m(\angle BAF) = m(\angle BAC),$$

deducem că

$$m(\angle CAF) < 1/2 m(\angle BAC) - m(\angle CAE),$$

deci F se află între E şi C. De aceea, $AE < AF$.

Problema 2. *Pe latura* BC *a unui triunghi* ABC *se ia un punct oarecare* D *(fig.3). Să se demonstreze că:*

$$\frac{a+b+c}{2} - a < AD < \frac{a+b+c}{2}.$$

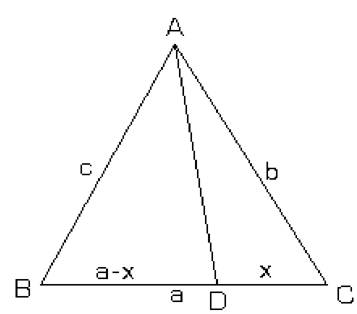


Fig.3.

<u>Soluţie.</u>

$$\begin{array}{l} AD > c - a + x \\ AD > b - x \\ \hline (+)\ 2AD > b + c - a \end{array} \quad \Leftrightarrow AD > \frac{b+c-a}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a$$

Deci: $\frac{a+b+c}{2} - a < AD$. Deducem

$$\begin{array}{l} AD < a - x + c \\ AD < b + c \\ \hline (+)\quad 2AD < a + b + c \end{array} \Leftrightarrow AD > \frac{a+b+c}{2}$$

Deci $\frac{a+b+c}{2} - a < AD < \frac{a+b+c}{2}$.

Problema 3. *Fie triunghiul* ABC *cu* $m(\angle BAC) \geq 90^0$ *. Să se arate că*

$$m(\angle BAC) > m(\angle ABC) \text{ şi } m(\angle BAC) > m(\angle ACB).$$

<u>Soluţie.</u> Fie triunghiul *ABC* cu $m(\angle BAC) \geq 90^0$. Cum

$$m(\angle BAC) + m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = 180^0,$$

deducem că:

$$m(\angle ABC) + m(\angle ACB) \leq 90^0$$

şi deci $m(\angle ABC) < 90^0$.

Dar $m(\angle ACB) < 90^0$, ceea ce implică

$$m(\angle BAC) > m(\angle ABC)$$

şi

$$m(\angle BAC) > m(\angle ACB).$$

Problema 4. *Fie triunghiul* ABC *şi* M, N *două puncte astfel încât* $B \in (MC)$ *şi* $C \in (BN)$*. Să se demonstreze că*

$$m(\angle MAN) < m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C).$$

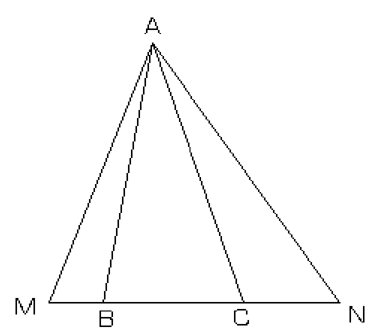


Fig. 4.

<u>Soluţie.</u> Fie triunghiul *ABC* şi punctele *M* şi $N \in BC$, astfel încât $B \in (MC)$ şi $C \in (BN)$ (fig.4). În această situaţie $\angle ABC$ este unghi exterior triunghiului *ABM*, $\angle ACB$ este unghi exterior triunghiului *ACN*. Conform teoremei unghiului exterior, $m(\angle ABC) > m(\angle MAB)$, $m(\angle ACB) > m(\angle NAC)$.

Deci

$$m(\angle MAN) = m(\angle MAB) + m(\angle BAC) + m(\angle CAN) <$$
$$m(\angle ABC) + m(\angle BAC) + m(\angle ACB)$$

de unde rezultă $m(\angle MAN) < m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C)$.

Problema 5. *Să se arate că în orice triunghi* ABC *are loc inegalitatea:*

$$abc \geq 8S^2.$$

Soluţie. Ţinând cont de formula lui Heron pentru calculul ariei unui triunghi, relaţia din enunţ este echivalentă cu $abcp \geq 8p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Dacă notăm $x = p - a > 0$, $y = p - b > 0$, $z = p - c > 0$, avem

$$x + y = c,\ y + z = a,\ z + x = b,$$

iar noua egalitate va fi echivalentă cu:

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz,$$

Această ultimă inegalitate este o consecinţă a inegalităţii

$$u + v \geq 2\sqrt{uv},\quad \forall u, v \in R^+.$$

Egalitatea se obţine în cazul triunghiului echilateral.

Problema 6. *Fie triunghiul* ABC *şi un punct* D *situat în interiorul triunghiului* ABC *astfel încât* $(AD) \equiv (AB)$*. Să se arate că în aceste condiţii,* $AB < AC$*.*

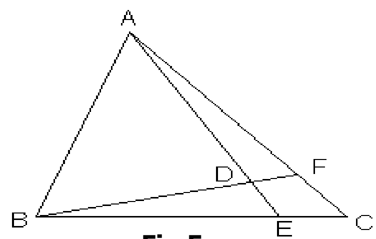


Fig.5.

Soluţie. Fie triunghiul *ABC* şi un punct *D* situat în interiorul triunghiului *ABC* astfel încât $(AD) \equiv (AB)$ (fig.5). Notăm: $\{E\} = (AD \cap (BC)$ $\{F\} = (BD \cap (AC)$.

Triunghiul ABD fiind isoscel avem $m(\angle ABD) = m(\angle ADB)$.

Prin urmare, $m(\angle ADB) < 90^0$ (deoarece unghiurile de la baza triunghiului isoscel nu pot fi obtuze sau drepte) ceea ce implică $m(\angle ADF) > 90^0$. Rezultă că în triunghiul *ADF*, $m(\angle ADF) > m(\angle AFD)$ şi conform teoremei 3 obţinem $AF > AD$.

Dar $AF < AC$ şi $(AD) \equiv (AB)$, ceea ce implică $AC > AB$.

Problema 7. *Să se demonstreze că în orice triunghi* ABC *are loc inegalitatea:*

$$\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{4r^2}$$

Soluţie. Se ştie că *S= rp*, iar *abc=4RS* deci

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{2p}{abc} = \frac{2S}{r4RS} = \frac{1}{2Rr}$$

Relaţia din enunţ este echivalentă cu $\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{2rR} \leq \frac{1}{4r^3}$, care se deduce din inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$. Egalitatea se realizează când *R=2r*, deci când triunghiul ABC este echilateral.

Bibliografie

[1] Lalescu T., *Geometria triunghiului,* Ed. Apollo, Craiova 1993.
[2] Moise, E., G*eometrie elementară,* Ed.Did.Ped., Bucureşti,1980.
[3] Nicolescu L., Boskoff, V., *Probleme practice de geometrie,* Ed.Tehnică, Bucureşti, 1990.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 41-46

AXIOMATICA ŞI GEOMETRIILE NEEUCLIDIENE

Valerian OPRIŞOR
Şcoala *Liviu Rebreanu* Mioveni, Argeş

AXIOMATICS AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES

Abstract. This work is a brief survey of the relationships between the Euclidean and noneuclidean geometries. It presents topics such as: the axiomatic method, hyperbolic noneuclidian models (*Klein, Poincaré*), geometry and reality, Riemannian elliptical geometry. The main features of each model are synthetized.

1. Metoda axiomatică

Metoda axiomatică în matematică începe cel puţin cu Euclid. Ar fi însă complet greşit să presupunem că matematica greacă a fost dezvoltată sau prezentată exclusiv în formă axiomatică, rigidă, a *Elementelor*. Dar impresia produsă de această operă asupra generaţiilor următoare a fost atât de mare, încât ea a devenit un model pentru orice demonstraţie riguroasă în matematică. Uneori chiar filozofi, ca de pildă Spinoza, în *Ethica, more geometrico demonstrata*, a încercat să prezinte raţionamentele sub forma unor teoreme deduse din definiţii şi axiome. În matematica modernă, după o abatere de la tradiţia euclidiană, care a avut loc în decursul secolelor XVII şi XVIII, a urmat o pătrundere din ce în ce mai mare a metodei axiomatice în toate domeniile. Unul dintre cele mai recente rezultate a fost crearea unei noi discipline, logica matematică.

În termeni generali, punctul de vedere axiomatic poate fi descris în modul următor: a demonstra o teoremă într-un sistem deductiv înseamnă a arăta că teorema este o consecinţă logică, necesară, a unor propoziţii demonstrate anterior; acestea la rândul lor, trebuie să fie demonstrate şi aşa mai departe.

Din vremea lui Euclid, geometria a fost prototipul oricărei discipline axiomatizate. Timp de secole, sistemul de axiome al lui Euclid a fost obiectul unui studiu intens. Dar numai de curând a devenit evident faptul că aceste postulate trebuie modificate şi completate, dacă vrem ca toată geometria elementară să poată fi dedusă din ele. În celebra sa carte, *Grundlagen der Geometrie* (prima ediţie a fost publicată în 1901), Hilbert a dat un sistem satisfăcător de axiome pentru geometrie şi, în acelaşi timp, a făcut un studiu exhaustiv al independenţei, consistenţei şi completitudinii lui.

Mulţimea axiomelor geometriei constituie definiţia implicită a tuturor noţiunilor geometrice *nedefinite*: *punct*, *dreaptă*, *incident* etc. Pentru aplicaţii este important faptul că noţiunile şi axiomele geometriei să corespundă bine propoziţiilor verificabile din punct de vedere fizic, referitoare la obiecte palpabile, *reale*. Realitatea fizică, aflată în spatele noţiunii de *punct*, este aceea a unui obiect foarte mic, ca de pildă semnul făcut cu creionul, în timp ce *dreapta* este o abstracţie a firului întins sau a razei de lumină. Proprietăţile acestor puncte şi drepte fizice concordă experimental, mai mult sau mai puţin, cu axiomele formale ale geometriei. Este de conceput ca experimente mai precise să necesite modificarea acestor axiome, dacă ele trebuie să descrie în mod adecvat fenomenele fizice. Dar dacă axiomele formale nu ar concorda mai mult sau mai puţin cu proprietăţile obiectelor fizice, atunci geometria ar prezenta un interes limitat. Astfel, chiar pentru formalişti, există ceva care are o influenţă mai mare asupra matematicii decât raţiunea umană.

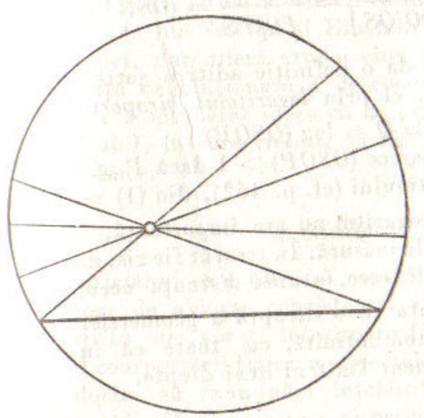
2. Geometria neeuclidiană hiperbolică

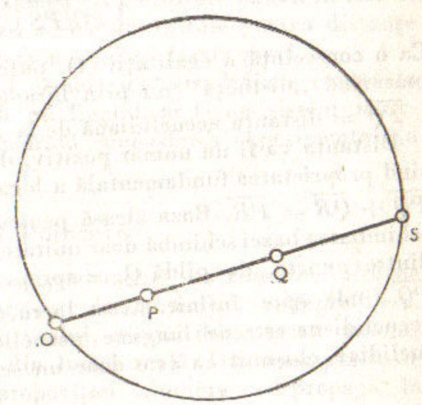
Există o axiomă a geometriei euclidiene, al cărei *adevăr*, adică a cărei corespondenţă cu datele empirice referitoare la firele întinse sau la razele de lumină nu mai este evidentă. Aceasta este celebrul postulat al paralelei unice, care afirmă că prin orice punct exterior unei drepte se poate duce o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată. Caracterul remarcabil al acestei axiome constă în faptul că ea enunţă o proprietate a dreptei în întregime, imaginată ca fiind nelimitată în ambele sensuri; într-adevăr, a spune că două drepte sunt paralele înseamnă că ele nu se intersectează, oricât le-am prelungi. Este evident faptul că există multe drepte care trec printr-un punct şi care nu intersectează o dreaptă dată, într-un cadru finit fixat, oricât de mare. Deoarece lungimea maximă posibilă a unei rigle, a unui fir sau chiar a unei raze de lumină vizibile cu telescopul este desigur finită şi deoarece în interiorul oricărui cerc finit există o infinitate de drepte care trec printr-un punct dat şi nu intersectează o dreaptă dată în interiorul cercului, rezultă că această axiomă nu poate fi verificată niciodată prin experienţă. Toate celelalte axiome ale geometriei euclidiene au un caracter finit, prin faptul că ele se referă la porţiuni finite ale dreptelor sau la figuri plane de întindere finită. Faptul că axioma paralelelor nu este verificată din punct de vedere experimental ridică problema dacă ea este, sau nu, independentă de celelalte axiome. Dacă ea ar fi o consecinţă logică necesară a celorlalte, atunci am putea să o scoatem din rândul axiomelor şi să o demonstrăm cu ajutorul celorlalte axiome euclidiene. Timp de secole, matematicienii au încercat să găsească o astfel de demonstraţie, datorită părerii larg răspândite printre cei care au studiat geometria, că postulatul paralelelor are un caracter esenţial diferit de cel al celorlalte postulate, lipsindu-i plauzibilitatea convingătoare pe care ar trebui să o aibă o axiomă a geometriei. Una dintre primele încercări de această natură a fost făcută de Proclus (secolul IV-lea e.n.), un comentator al lui Euclid, care a încercat să evite folosirea unui postulat special al paralelelor, definind paralela la o dreaptă ca fiind locul geometric al tuturor punctelor aflate la o distanţă dată de dreapta dată. Prin aceasta, Proclus a scăpat din vedere faptul că, în acest mod, dificultatea a fost deplasată în alt loc, deoarece în acest caz ar fi fost necesar să se demonstreze că locul geometric al cestor puncte este o dreaptă. Deoarece Proclus nu a putut demonstra acest lucru, el a trebuit să-l accepte ca postulat, în locul axiomei paralelelor şi în acest mod nu s-a câştigat nimic, deoarece se vede cu uşurinţă că cele două axiome sunt echivalente. Iezuitul Saccheri (1667-1733) şi mai târziu Lambert (1728-1777) au încercat să demonstreze postulatul paralelelor prin metoda indirectă, presupunând contrariul şi căutând să obţină consecinţe absurde. Departe de a fi absurde, concluziile lor erau de fapt teoreme de geometrie neeuclidiană, dezvoltată mai târziu. Dacă nu le-ar fi privit ca absurdităţi, ci ca propoziţii de sine stătătoare, ei ar fi fost descoperitorii geometriei neeuclidiene.

Pe atunci, orice sistem geometric, care nu era în acord deplin cu cel al lui Euclid, ar fi fost considerat un nonsens evident. Kant, cel mai influent filozof al vremii, a formulat această atitudine, afirmând că axiomele lui Euclid sunt inerente intelectului uman, şi de aceea au o valabilitate obiectivă pentru spaţiul *real*. Această încredere în axiomele geometriei euclidiene ca exprimând adevăruri incontestabile, existente în domeniul intuiţiei pure, a fost unul dintre principiile fundamentale ale filozofiei lui Kant. Dar cu timpul, nici vechile moduri de gândire, nici autoritatea filozofică nu au putut suprima convingerea că şirul nesfârşit de eşecuri suferite în căutarea unei demonstraţii pentru postulatul paralelelor este independent de celelalte. (În mod asemănător, lipsa succesului în demonstrarea faptului că ecuaţia generală de gradul V ar putea fi rezolvată prin radicali a dus la bănuiala, verificată mai târziu, că o astfel de rezolvare este imposibilă). Matematicianul maghiar Bolyai (1802-1860) şi matematicianul rus Lobacevski (1793-1856) au rezolvat problema, construind în toate amănuntele o geometrie în care axioma paralelelor nu este valabilă. Atunci când entuziastul şi tânărul Bolyai a prezentat lucrarea sa lui Gauss, *prinţul matematicienilor*, pentru recunoaşterea pe care o aştepta cu atât nerăbdare, el a fost informat că lucrarea lui a fost anticipată de Gauss însuşi, dar că acesta nu s-a îngrijit de publicarea rezultatelor obţinute, fiindu-i teamă de o publicitate prea zgomotoasă.

Ce semnificaţie are independenţa postulatului paralelelor? Aceasta înseamnă că este posibil să se construiască un sistem consistent de propoziţii *geometrice*, referitoare la puncte, drepte etc., deduse dintr-un sistem de axiome în care postulatul paralelelor este înlocuit cu negaţia lui. Un astfel de sistem se numeşte geometrie neeuclidiană. A fost necesar curajul intelectual al lui Gauss, Bolyai şi Lobacevski, pentru a recunoaşte că o astfel de geometrie, bazată pe un sistem neeuclidian de axiome, poate fi consistentă.

Pentru a demonstra consistenţa noii geometrii, nu este suficient să deducem un mare număr de teoreme neeuclidiene, aşa cum au făcut Bolyai şi Lobacevski. În schimb, am învăţat să construim *modele* ale unei astfel de geometrii, care satisfac toate axiomele geometriei lui Euclid, cu excepţia postulatului paralelelor. Cel mai simplu model de acest fel a fost dat de Felix Klein, a cărui operă în acest domeniu a fost stimulată de ideile geometrului englez Cayley (1821-1895). În acest model pot fi trasate o infinitate de *drepte*, *paralele* unei drepte date care trec printr-un punct exterior acesteia din urmă. O astfel de geometrie se numeşte geometrie Bolyai-Lobacevski sau geometrie *hiperbolică*.





Modelul neeuclidian al lui Klein *Distanţa neeuclidiană*

3. Geometriile şi realitatea

Modelul lui Klein artă că geometria hiperbolică, privită, ca sistem deductiv formal, este tot atât de consistentă ca şi geometria euclidiană clasică. Se pune atunci problema, care din două trebuie preferată ca descriere a geometriei lumii fizice? După cum am mai văzut, experienţa nu poate decide niciodată dacă există o singură dreaptă sau o infinitate de drepte, care trec printr-un punct şi sunt paralele cu o dreaptă dată. În geometria euclidiană însă, suma unghiurilor oricărui triunghi este egală cu 180^0, în timp ce în geometria hiperbolică, suma este întotdeauna mai mică decât 180^0. în consecinţă, Gauss a efectuat o experienţă pentru a rezolva problema. El a măsurat cu precizie unghiurile unui triunghi, format de vârfurile a trei munţi destul de îndepărtaţi unul de altul, şi a găsit că suma unghiurilor este egală cu 180^0, în limitele erorii experimentale. Dacă rezultatul ar fi fost mai mic decât 180^0, consecinţa ar fi fost că geometria hiperbolică este preferabilă pentru descrierea realităţii fizice. Dar, după cum s-a arătat prin această experienţă, problema nu a putut fi rezolvată, deoarece pentru triunghiurile mici, ale căror laturi au lungimea de numai câteva mile, abaterea faţă de 180^0 în geometria hiperbolică ar putea fi atât de mică, încât să nu fi fost detectabilă cu instrumentele lui Gauss. Astfel, deşi experimentul nu a dus la nici o concluzie, el a arătat că geometriile euclidiană şi hiperbolică, care se deosebesc mai mult din punct de vedere global, coincid atât de mult pentru figuri relativ mici, încât, din punct de vedere experimental, ele sunt echivalente. De aceea, atâta timp cât se iau în considerare proprietăţile pur locale ale spaţiului, alegerea dintre cele două geometrii trebuie făcută numai pe baza simplităţii şi comodităţii. Deoarece sistemul euclidian este mai uşor de mânuit, îl vom folosi atâta timp cât considerăm distanţe mici (de câteva milioane de mile!). Nu trebuie totuşi să ne aşteptăm ca el să fie în mod necesar potrivit pentru descrierea universului în ansamblu, sub aspectele sale globale. Aici, situaţia este cu totul analogă cu aceea care există în fizică, unde sistemele lui Newton şi Einstein dau aceleaşi rezultate pentru distanţe şi viteze mici, dar diferă atunci când intervin mărimi foarte mari.

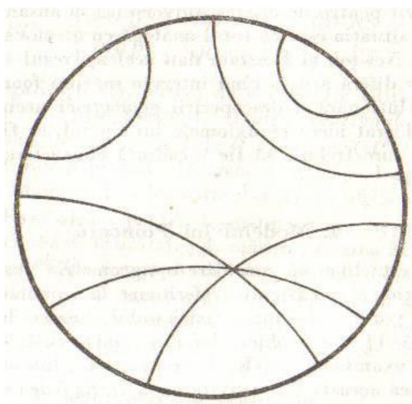
Importanţa revoluţionară a descoperirii geometriei neeuclidiene constă în faptul că ea a spulberat ideea că axiomele lui Euclid, ar fi un sistem matematic imuabil, în care trebuie să fie încadrată cunoaşterea experimentală a realităţii fizice.

3. Modelul lui Poincaré

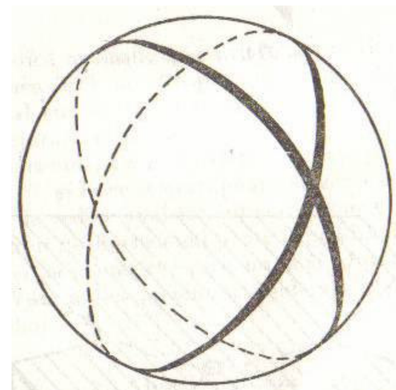
Matematicianul este liber să considere o *geometrie* ca fiind definită de orice sistem de axiome consistente, referitoare la *puncte*, *drepte* etc. Investigaţiile sale vor fi folositoare fizicianului, numai dacă aceste axiome corespund comportării fizice a obiectelor din lumea reală. Din acest punct de vedere, dorim să examinăm înţelesul propoziţiei *lumina se propagă în linie dreaptă*. Dacă aceasta este privită ca definiţie fizică a *dreptei*, atunci axiomele geometriei trebuie să fie alese în aşa fel, încât să corespundă comportării razelor de lumină. Să ne imaginăm, o dată cu Poincaré, o lume formată din interiorul unui cerc C, astfel încât viteza luminii în orice punct din interiorul cercului să fie proporţională cu distanţa punctului la circumferinţă. Se poate arăta că razele de lumină vor avea atunci forma unor arce de cerc, ortogonale circumferinţei C. Într-o astfel de lume, proprietăţile geometrice ale *dreptelor* (definite ca raze de lumină), se vor deosebi de proprietăţile euclidiene ale dreptelor. În particular, axioma paralelelor nu va rămâne în vigoare, pentru că vor exista o infinitate de drepte care trec printr-un punct şi care nu intersectează o *dreaptă* dată. De fapt, *punctele* şi *dreptele* acestei lumi vor avea proprietăţile geometrice ale *punctelor* şi *dreptelor* modelului lui Klein. Cu alte cuvinte, vom avea un alt model al geometriei hiperbolice. Însă geometria lui Euclid va fi şi ea aplicabilă acestei lumi; în loc de a fi *drepte* neeuclidiene, razele de lumină vor fi cercuri euclidiene, ortogonale lui C. Astfel, vedem că diferite sisteme ale geometriei pot descrie aceeaşi situaţie fizică, cu condiţia ca obiectele fizice (în cazul nostru, razele de lumină) să fie corelate cu diferitele concepte ale celor două sisteme:

rază de lumină $\rightarrow$ *dreaptă* – geometria hiperbolică rază de lumină $\rightarrow$ *cerc* – geometria euclidiană.

Deoarece noţiunea de dreaptă a geometriei euclidiene corespunde comportării unei raze de lumină într-un mediu omogen, am spune că geometria regiunii din interiorul lui C este hiperbolică, înţelegând doar că proprietăţile fizice ale razelor de lumină corespund în această lume proprietăţilor *dreptelor* geometriei hiperbolice.



Modelul neeuclidian al lui Poincaré

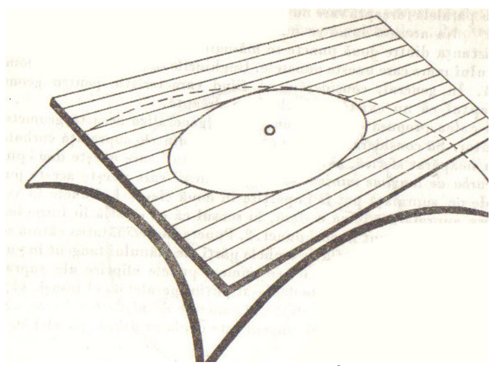


Drepte pentru o geometrie riemanniană

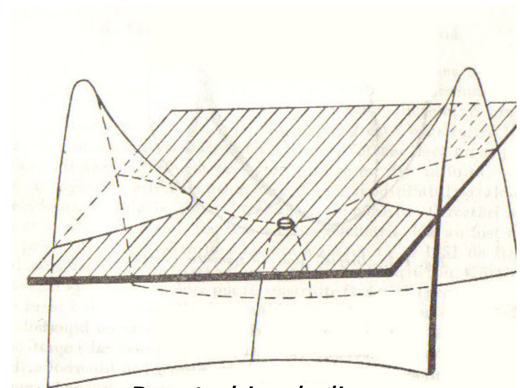
5. Geometria eliptică sau riemanniană

În geometria euclidiană, ca şi în geometria hiperbolică sau a lui Bolyai-Lobacevski, se face ipoteza tacită că dreapta este infinită (întinderea infinită a dreptei este esenţial legată de conceptul şi de axiomele relaţiei *între*). Dar după ce geometria hiperbolică a deschis drumul către construirea liberă a geometriilor, a fost natural ca matematicienii să se întrebe dacă nu se pot construi alte geometrii neeuclidiene, în care o dreaptă să nu fie infinită, ci finită şi închisă. Desigur, în astfel de geometrii nu numai postulatul paralelelor, dar şi axiomele legate de relaţia *între* trebuie să fie părăsite. Cercetări moderne au scos în evidenţă importanţa fizică a acestor geometrii. Ele au fost considerate pentru prima dată în disertaţia inaugurală susţinută în 1851 de Riemann, cu prilejul admiterii sale ca privat-docent al Universităţii din Göttingen. Geometriile cu drepte finite închise pot fi construite fără nici o greutate. Să ne închipuim o lume bidimensională, formată din suprafaţa S a unei sfere, în care definim *dreapta* ca fiind un cerc mare al sferei. Acesta ar fi modul natural de descriere a lumii unui navigator, deoarece arcele de cercuri mari sunt curbele de lungime minimă între două puncte de pe o sferă, iar aceasta este proprietatea caracteristică a dreptelor din plan. Într-o astfel de lume, oricare două *drepte* se intersectează, astfel încât dintr-un punct exterior nu se poate duce nici o paralelă (dreaptă care nu intersectează) la o dreaptă dată. Geometria *dreptelor* din această lume se numeşte geometrie eliptică. În această geometrie eliptică, distanţa dintre două puncte se măsoară prin lungimea celui mai scurt arc al cercului mare care uneşte punctele. Unghiurile se măsoară ca în geometria euclidiană. În general, considerăm ca fiind caracteristic pentru geometria eliptică faptul că nu există paralele la o dreaptă.

Urmând calea propusă de Riemann, putem generaliza această geometrie în felul următor. Să considerăm o lume care constă dintr-o suprafaţă curbată din spaţiu, nu neapărat sferică, şi să definim *dreapta* care uneşte două puncte, ca fiind curba de lungime minimă sau *geodezica* care uneşte aceste puncte. Punctele de pe suprafaţă pot fi împărţite în două clase: 1. puncte în vecinătatea cărora suprafaţa este ca o sferă, în sensul că ea se află în întregime de o parte a planului tangent în acel punct; 2. puncte în vecinătatea cărora suprafaţa are forma unei şei şi se află de ambele părţi ale planului tangent în punctul considerat. Punctele de primul fel se numesc puncte eliptice ale suprafeţei, deoarece dacă planul tangent este deplasat puţin, paralel cu el însuşi, el intersectează suprafaţa după o curbă eliptică; punctele de al doilea fel se numesc hiperbolice, deoarece dacă planul tangent este deplasat puţin, paralel cu el însuşi, el intersectează suprafaţa după o curbă asemănătoare cu hiperbola. Geometria *dreptelor* geodezice din vecinătatea unui punct al suprafeţei este eliptică sau hiperbolică, după cum punctul este eliptic sau hiperbolic. Într-un astfel de model de geometrie neeuclidiană, unghiurile se măsoară ca în geometria euclidiană.



Puncte eliptice



Puncte hiperbolice

Această idee a fost dezvoltată de Riemann, care a considerat o geometrie a spaţiului, analoagă cu această geometrie a suprafeţei, în care *curbura* spaţiului poate schimba natura geometriei de la punct la punct. *Dreptele* unei geometrii riemanniene sunt geodezicele. În teoria generală a relativităţii a lui Einstein, geometria spaţiului este o geometrie riemanniană, lumina se propagă în lungul geodezicelor, iar curbura spaţiului este determinată de natura materiei pe care o conţine.

De la originea sa, aflată în studiul axiomaticii, geometria neeuclidiană a devenit un instrument extrem de util pentru aplicaţii la lumea fizică. În teoria relativităţii, în optică şi în teoria generală a propagării undelor, o descriere neeuclidiană a fenomenelor este uneori mult mai adecvată decât una euclidiană.

Bibliografie

[1] Courant R., Robbins H., *Ce este matematica?*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1969.

[2] Graustein W. C., *Introduction to higher geometry*, New York, McMillan 1930.

[3] Hilbert D., *The foundations of geometry*, tradusă de E. J. Townsend, ed. a III-a, La Salle, III: Open Court, 1938.

[4] Robinson G. B., *The foundations of geometry*, University of Toronto Press, 1940.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 47-49

MATEMATICA ÎN SPRIJINUL FIZICII

Elena PUFU
Şcoala nr.1 *Liviu Rebreanu* Mioveni, Argeş

MATHEMATICS SUPPORTING PHYSICS

Abstract. Use of graphical representations of real functions in teaching physics is presented. So far, the mathematical aspects involved were underlined for the physics lessons; in the future, they can be used during mathematics lessons as a feedback for modelling activities. This is an opportunity to connect mathematics and physics lessons.

A face fizică înseamnă a cerceta şi a pune întrebări naturii şi lumii înconjurătoare într-un mod foarte precis, pentru a înţelege procesele şi fenomenele care au loc. Fizica este o ştiinţă a experimentului. În urma efectuării experimentului, fizicianul obţine un număr de date prin efectuarea unui număr de măsurători. Din aceste măsurători se încearcă obţinerea de relaţii matematice între mărimile analizate. Majoritatea legilor fizicii se exprimă prin relaţii matematice.

O activitate experimentală în studiul fizicii presupune două etape:

- efectuarea măsurătorilor;
- calculul mărimilor fizice, adică prelucrarea matematică a rezultatelor obţinute prin măsurători. Orice măsurătoare directă a unei mărimi implică întotdeauna erori, adică valori apropiate de valoarea reală, exactă, în mod evident necunoscută. Rezultatele măsurătorilor pe măsură ce se obţin se trec în tabele.

Dacă într-un experiment se urmăreşte variaţia unei mărimi fizice *y* în funcţie de alta *x*, atunci se realizează un grafic. Avantajele unui grafic sunt:

- descoperirea cu uşurinţă a maximelor sau a minimelor;
- se poate arăta dacă există sau nu o relaţie între cele două variabile – mărimi fizice şi, dacă există, se poate găsi forma ei matematică.

Vom pune în evidenţă câteva utilizări ale graficelor în predarea fizicii în gimnaziu.

Exemplul 1. Dependenţa intensităţii curentului electric în funcţie de tensiunea aplicată pentru un consumator electric (bec)

$$I = \frac{U}{R}$$

R= rezistenţa electrică a consumatorului

$$ctg\alpha = \frac{U}{I} = R$$

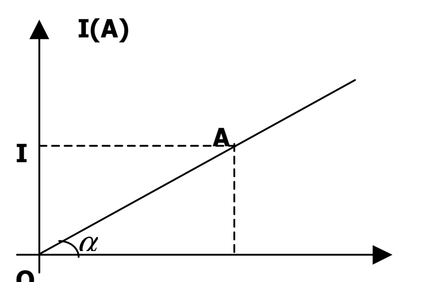


Fig. 1.

Exemplul 2. Dependenţa între poziţie (coordonată) şi timp exprimă o lege de mişcare

$$X=X_0+v\cdot t$$

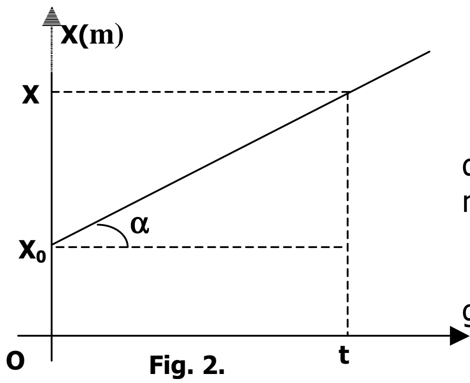


Fig. 2.

$$tg\alpha = \frac{x - x_0}{t}$$

Panta dreptei, tangenta unghiului făcut de dreaptă cu axa timpului, se identifică cu viteza mobilului.

Unele mărimi fizice pot avea o interpretare geometrică, ca cele din exemplele următoare.

Exemplul 3. Distanţa parcursă – aria cuprinsă între curba v(t) şi axa timpului: A=t·v=d

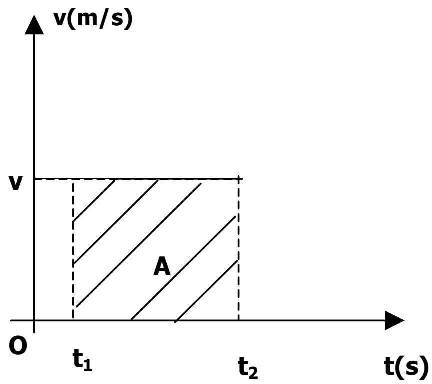


Fig. 3.a.

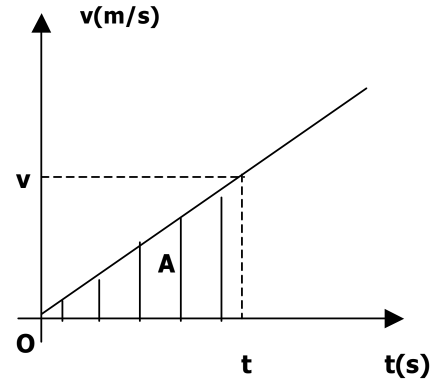


Fig. 3.b.

În figura 3.a este reprezentată funcţia *v(t)* care, în cazul mişcării rectilinii uniforme, este o paralelă la abscisă. Calculăm aria *A* cuprinsă între curba *v(t)*, abscisă şi paralelele duse la ordonată prin punctele de abscisă t_1, respectiv t_2 şi obţinem

$$A=v(t_2-t_1)=d.$$

Utilizând legea mişcării rectilinii uniforme obţinem acelaşi lucru: $d=v(t_2-t_1)$.

Calculul ariei folosind graficul *v=f(t)* ne permite să calculăm distanţa parcursă de un mobil într-o mişcare rectilinie variată(accelerată) chiar şi în condiţiile în care nu cunoaştem legea de mişcare – figura 3.b. Aria cuprinsă între curba *v(t)*, abscisă şi paralela dusă la ordonată prin punctul de coordonată *t* reprezintă distanţa străbătută de mobil în mişcarea rectilinie variată. Această arie se poate calcula uşor fiind aria unui triunghi dreptunghic.

Exemplul 4. Lucrul mecanic

a) aria cuprinsă între graficul forţei şi axa deplasării

F=forţă constantă

$X_2-X_1=d$

$A=F\cdot d=L$

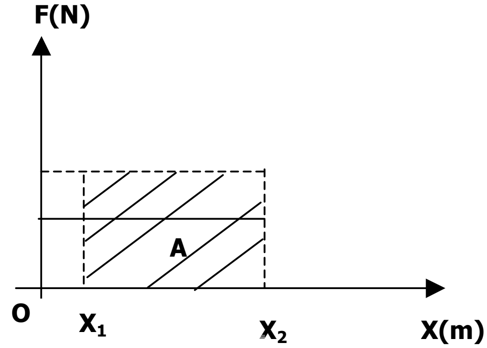


Fig. 4.a.

b) aria cuprinsă între graficul puterii şi axa timpului

$$A=P \cdot t=L$$

$$P=\frac{L}{t} \Rightarrow L=P \cdot t$$

Deci aria reprezintă lucrul mecanic.

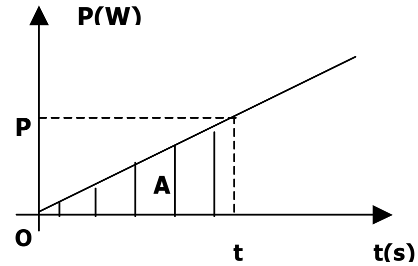


Fig. 4.b.

Exemplul 5. Sarcina electrică

Reprezentând grafic funcţia *I(t)* pentru un conductor putem determina sarcina electrică transportată printr-o secţiune transversală a acelui conductor.

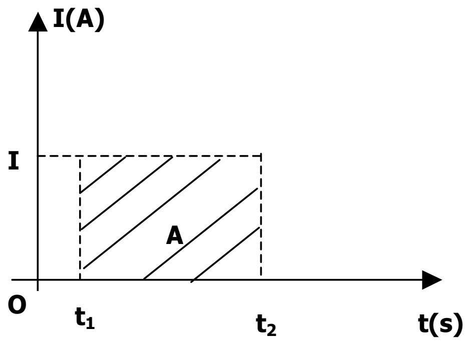


Fig. 5.a.

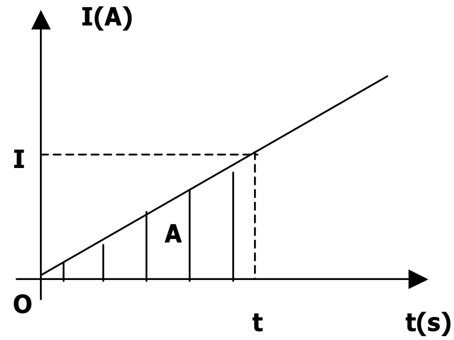


Fig. 5.b.

În figura 5.a. este reprezentat graficul *I(t)* pentru un curent electric de intensitate constantă. Aria cuprinsă între curba *I(t)*, abscisă şi paralelele duse la ordonată prin punctele de abscisă t_1 şi t_2 este:

$$A=I(t_2-t_1)=I\,\Delta t$$

deci, sarcina transportată de curentul de intensitate constantă *I* prin secţiunea transversală a conductorului în timpul Δt.

Dacă intensitatea curentului creşte liniar în timp – figura 5.b. –reprezentând grafic *I(t)* putem calcula sarcina transportată prin secţiunea transversală a conductorului ca fiind aria cuprinsă între curbă, abscisă şi paralela dusă la ordonată prin punctul de abscisă *t*.

Deseori încercând să rezolvăm probleme de fizică constantăm că deşi cunoaştem legile fizice ce guvernează fenomenele analizate, nu putem obţine rezultatul dorit deoarece aparatul matematic pe care-l avem la dispoziţie nu ne permite acest lucru. Pentru rezolvarea acestei situaţii este necesară corelarea dintre programa de matematică cu cea de fizică.

Bibliografia

[1] Cristea, Gh., Ardelean, I., *Elemente fundamentale de fizică*, Ed. Dacia, Cluj – Napoca, 1985.
[2] Girard, G., Thiercé C., *ALEF/GÉOMÉTRIE*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
[3] Hristev, A., *Mecanică şi acustică* , Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
[4] *** Manualele de fizică şi de matematică pentru gimnaziu.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 50-55

PREDAREA – ÎNVĂŢAREA EFICIENTĂ A MATEMATICII ÎN CICLUL PRIMAR

Mariana RĂDULESCU, Daniela BERECHET
Şcoala nr.1 *Liviu Rebreanu* Mioveni, Argeş

TEACHING-LEARNING ELEMENTARY MATHEMATICS

Abstract. Starting with the Bruner's statement that any child at any age might learn anything, given appropriate strategies and school supplies, we list some types of exercises that can be used to emphasise the properties of arithmetical operations in the elementary grades.

Circulă diverse sintagme care probează contrariul afirmaţiei că matematica este *monstru cenuşiu*, şi anume: *din spectacolul matematicii*, *izbânda minţii*, *recreaţii matematice*, *distractivă*. J.S. Bruner a elaborat celebra şi controversata ipoteză: *oricărui copil, în orice stadiu de dezvoltare, i se poate preda cu succes orice subiect de învăţământ, într-o formă intelectuală adecvată*.

Câţi elevi nu ajung matematicieni datorită învăţătorului sau profesorului lor? ne întrebăm noi. De altfel, autorii acestui articol consideră că în primele clase se naşte la elev atractivitatea sau repulsia pentru studiul acestei discipline riguroase. Din numeroasele secrete culese din experienţa considerabilă la catedră, conturăm câteva, care au facilitat succesul discipolilor la ştiinţa amintită, au conferit afinitate şi izbandă în abordarea situaţiilor-problemă. Excludem memorarea scăderii, în favoarea predării-învăţării conştiente a *adunării,* iar aceasta să se realizeze anticipat încă de la descompunerea şi compunerea numerelor in concentrul 0-20.

Se ajunge prin joc la algoritmul: cu cât un numar natural este mai mare, cu atât posibilităţile de componenţă se multiplică.

Dacă numim *problema* lui 5 ca relaţii: 5 si 0; 4 si 1; 3 si 2, invităm la proprietatea de comutativitate a reuniunii; similar, apariţia logică de diferenţă dintre o mulţime şi o submulţime a sa conduce la conştientizarea operaţiei aritmetice de scădere.

Cuplajele de mărimi identice, enumerate de la 1 + 1 sau 1 + 1 + 1 … până la adunarea repetată de termeni egali cu 9, produc un deliciu copiilor şi diminuează cantitatea variantelor de sume *fără* sau *cu trecere peste ordin*. Reţinerea oricărei relaţii de tipul a + b = c induce o viziune simplă în toată problematica: comutativitatea adunării, scăderea, probe, determinarea valorii unei necunoscute.

Circuitul închis din exemplul 6 + 7 = 1; 13 – 7 = 6, favorizează logica rezolvării scăderilor: - 6 = 7, 13 - □ = 7, 13 – 6 = □, situaţie în care se face apel la proba scăderii prin adunare, ca operaţie inversă. Nu vizăm doar anularea tablei scăderii, ci şi prezentarea succintă, esenţializată a adunării până la 20, fundamentul majorităţii calculelor de ordin 1, indiferent de ordinul de mărime al termenilor. Tabloul schematic de bază s-ar încadra între limitele 6-18, fără inserarea adunării cu 0 sau 1, considerate facile.

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4 + 2	5 + 2	6 + 2	7 + 2	8 + 2	9 + 2	9 + 3	9 + 4	9 + 5	9 + 6	9 + 7	9 + 8	9 + 9
	3 + 3	4 + 3	5 + 3	6 + 3	7 + 3	8 + 3	8 + 4	8 + 5	8 + 6	8 + 7	8 + 8	
			4 + 4	5 + 4	6 + 4	7 + 4	7 + 5	7 + 6	7 + 7			
					5 + 5	6 + 5	6 + 6					

Pentru a se fixa în memorie orice variantă şi ca joc alternativ, ar fi recomandat să se exprime şi reversul, exemplu 9 + 6 sau 6 +9 şi 8 +7 sau 7 + 8, care-l vizează pe 15.

În corelare cu aspectul sus-amintit ar fi proprietatea de *asociativitate a adunării* cu mai mulţi termeni, aplicabilă ca grupare convenabilă de numere, având ca rezultantă obţinerea de sume identice sau mărimi de zeci întregi, sute ş.a.m.d.

Elevii trebuie îndrumaţi ca, înainte de a opera, să arunce o privire de ansamblu asupra exerciţiului, care să se concretizeze uneori cu intuirea unor asocieri favorabile. Nu se abordează totdeauna o situaţie-problemă în ordinea prezentării datelor ei!

Exemple.

19 + 16 + 17 + 14 + 33 = (19 + 14) + (16 + 17) + 33 = 33 + 33 + 33 = 99;

1 + 87 + 95 + 5 + 113 + 299 = (95 + 5) + (87 + 113) + (1 + 299) = 100 + 200 + 300 = 600.

Similar acestui procedeu ar putea fi considerată şi estimarea unei sume (ca o probă preliminară a calculului efectuat) sau aplicarea rotunjirii prin lipsă/adaos a numerelor din expresia dată. Astfel, solicitându-se însumarea numerelor 48, 29 şi 14, orientăm atenţia spre aproximarea la corespondentele 50, respectiv 30 şi 10; totalul estimat se cifrează în jurul lui 90. Dar, artificiul de calcul poate să conveargă spre determinarea exactă a termenului, apelând în genere la aproximarea prin adaos.

Exemplu. 399 + 18 + 579 = (400 + 20 + 580) – (1 + 2 + 1) = 1000 – 4 = 996.

Analog operaţiei de adunare care antrenează implicit reversul său – scăderea, am procedat şi cu insistarea pe *înmulţire* ce garantează împărţirea; deci, nu am aglomerat problematica matematicii cu scăderea şi împărţirea, acestea dând o mai mare bătaie de cap dacă se tratează ca operaţii distincte de celelalte două. Înţelegerea esenţei înmulţirii, ca adunare repetată de termeni egali, trebuie realizată din start pe baza demonstrării prin reprezentări grafice şi cazuri numerice simple. Ţine tot de preocupările lecţiilor introductive să facem funcţională proprietatea de comutativitate a înmulţirii, cunoscută ca terminologie de la adunare. Pe baza ei, aproape jumătate din înmulţiri sunt la modul real cvasicunoscute. La tabla înmulţirii cu 9, de exemplu, inedită este numai $9 \cdot 9 = 81$, celelalte fiind deduse din tabelele anterioare. Întrucât tabla înmulţirii se corelează efectiv cu adunarea repetată şi deci cu numărarea, am optat pentru procedeul metodic cu deînmulţit permanent, care posedă cel puţin avantajul de a stabili relaţii de recurenţă.

Exemplu. $6 \cdot 9 = 6 \cdot 8 + 6 =$… sau $6 \cdot 10 – 6 =$….

Am explicat înmulţirea cu 0, 1 sau 10 ($n \cdot 0 = 0$, $n \cdot 1 = n$ şi $n \cdot 10 = n0$), care au fost suprimate din ansamblu. Dat fiind numărătoarea din 2 în 2 până la 20, devenită automatism încă din clasa I, asimilarea acestei table nu comportă dificultăţi. De asemenea, produsele de factori egali se pot recomanda ca o reţetă simplă de memorat a pătratelor perfecte.

$3 \cdot 3 =9$; $4 \cdot 4 = 16$; $5 \cdot 5 = 25$; $6 \cdot 6 = 36$; $7 \cdot 7 = 49$; $8 \cdot 8 = 64$; $9 \cdot 9 = 81$.

După aceste demersuri adoptate, vestita tablă a înmulţirii s-a redus la

$3 \cdot 4$					
$3 \cdot 5$	$4 \cdot 5$				
$3 \cdot 6$	$4 \cdot 6$	$5 \cdot 6$			
$3 \cdot 7$	$4 \cdot 7$	$5 \cdot 7$	$6 \cdot 7$		
$3 \cdot 8$	$4 \cdot 8$	$5 \cdot 8$	$6 \cdot 8$	$7 \cdot 8$	
$3 \cdot 9$	$4 \cdot 9$	$5 \cdot 9$	$6 \cdot 9$	$7 \cdot 9$	$8 \cdot 9$

Datorită valorii sale instrumentale deosebite, se cuvine să punem de timpuriu la dispoziţia elevilor tehnica aplicării proprietăţii de distributivitate a înmulţirii faţă de adunare, bază a rezolvării unor exerciţii sau a compunerii de probleme după modele, de exemplu

$$6 \cdot (5 + 4) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 30 + 24 = 54 \text{ sau } = 6 \cdot 9 = 54.$$

O astfel de caracteristică are aplicaţii şi în deducerea unor formule de geometrie, cum ar fi perimetrul dreptunghiului: $2L + 2l = 2(L + l)$.

În sfârşit, înmulţirea devine suport clar în explicitarea împărţirii (ca operaţie opusă şi inversă), a cunoaşterii probelor în aflarea valorilor nedeterminate în operaţii de gradul II.

* În mintea copiilor trebuie să se delimiteze şi *repertoriul de formule* care consacră, legitimează fiecare operaţie aritmetică.

Între aceste sintagme de recomandare se pot stabili corespondenţe pe verticală sau orizontală, acţionând aici transferul de cunoştinţe.

ADUNAREA	SCĂDEREA
- semnul *plus* - termeni - sumă (total) - măriţi cu… - mai mult cu… - adunarea este comutativă	- semnul *minus* - termeni (descăzut, scăzător) - rest (diferenţă) - micşoraţi cu… - mai puţin cu… - cu cât?
↓ ↑	↓ ↑
ÎNMULŢIREA	ÎMPĂRŢIREA
- semnul *ori* - factori - măriţi de…ori - mai mult de… ori - înmulţirea este comutativă - dublu, triplu,…, înzecit	- semnul *împărţit* - termeni (deîmpărţit, împărţitor) - micşoraţi de… ori - mai puţin de … ori - doime, treime, …, zecime - de câte ori?

Din interdependenţa acestor expresii ce le recomandă se sporeşte înţelegerea problemei matematice. Confuzia lor, adaptarea unui sens echivoc, neconform cu realitatea, conduce spre rezultate eronate, ilogice.

Secvenţa de *captare a atenţiei* este introdusă de multă vreme în proiectul lecţiei ca deschizător şi mobilizator al proceselor intelectuale, în procesul cunoaşterii. Ea trebuie să şocheze, să declanşeze interesul pentru activitate; acest fapt vizează tactul propunătorului care încearcă să proiecteze un *centru de interes* la care să se ralieze efectivul şcolar.

În virtutea inerţiei momentului introductiv creat şi al dublării lui de o activitate variată, care trezeşte interese, şi acest aspect este un garant al eficientizării orei de matematică. Iată câteva mostre.

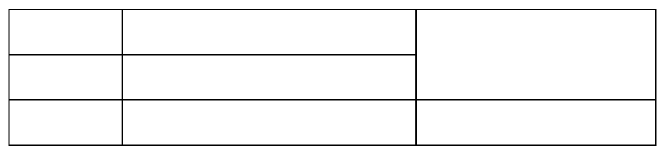
1. Cu cât este mai mare jumătatea decât doimea unui număr? Similar, se pot compara triplul cu întreitul sau sfertul cu pătrimea şi a patra parte dintr-o mărime dată etc.
2. În planul unităţilor de măsură se cer comparate sfertul de oră cu 15 minute, secolul cu veacul, decimetrul cu decametrul…
3. Adevărat sau Fals?

    a) $10 \cdot (9 + 8 + 7) = 90 + 15 = 105$

    b) 2/5 din 300 = $300 : 2 \cdot 5 = 150 \cdot 5 = 750$.

4. Diferenţa de vârste dintre doi fraţi este acum de 3 ani; dar peste 4 ani?

5. Ştii să numeri?
Câte dreptunghiuri vezi în desen?



Înainte de orice, captaţi bunăvoinţa celor care vă ascultă – au recomandat profesorii de retorică, îndemn cu aplicabilitate maximă şi în didactică.

Organizarea calculului mintal, ignorată frecvent în actul didactic, succede evenimentului amintit anterior, creând astfel carenţe în formarea priceperilor şi deprinderilor de calcul în scris sau în dezvoltarea facultăţilor cognitive.

Oferim un evantai de domenii ce ilustrează acest aspect şi concură la obţinerea unor efecte pozitive în plan matematic, punând creierul în tensiune:

a) formule de calcul prescurtat, relativ la înmulţirea cu 5, 9, 11, 25, 50, 99,…

b) cunoaşterea efectului lui zero ca factor la înmulţire sau deîmpărţit ($0 \cdot n = 0 :n = 0$);

c) utilizarea unei terminologii matematice de tipul: par, impar, consecutiv, distinct, răsturnat, identic, cel mult egal cu…, sumă, diferenţă, produs, cât,…;

d) efectuarea unor operaţii în lanţ care să aibă limita superioară la 100, de obicei;

e) determinarea a două numere naturale, cunoscând suma şi diferenţa lor (se calculează semisuma, respectiv semidiferenţa numerelor);

f) precizarea sumei a 3, 5, 7, … numere, în ipoteza că se ştie media lor aritmetică sau numărul din mijloc (obs.: aceasta se înmulţeşte cu numărul numerelor);

g) exerciţii care fac apel la cunoaşterea proprietăţilor aritmetice: comutativitate, asociativitate, distributivitate.

Culturile occidentale tind să transmită două practici – aritmetica orală şi cea scrisă, care generează performanţe diferite. Astfel, când copiii trebuie să rezolve probleme-n stradă, ei au răspuns la 98% din întrebări, în timp ce la şcoală, bazându-se pe calcul în scris, au dat răspunsuri corecte la 74% din probleme şi 37% din exerciţii aparţinând aceluiaşi chestionar. Explicaţia: în calculul oral subiecţii păstrează esenţa problemei în minte, imaginându-şi referinţele ei, iar în aritmetica scrisă se asistă la o disociere între semantica şi sintaxa matematică.

Rezolvarea unei situaţii matematice prin *mai multe metode,* sintetizarea într-o *formulă numerică* a demersului adoptat, *compunerea* de probleme după reperul obţinut sau impus.

I. Rezolvă în 4 feluri exercitiul 25 – 14.

25 –	25 – 14 = 11;
<u>14</u>	25 – 14 = 25 – 10 – 4 = 11;
11	25 – 14 = (20 – 10) + (5 – 4) = 10 + 1 =11.

II. Însumaţi 3 numere pare consecutive, dacă unul dintre ele este cel mai mare număr de două cifre distincte. (Variante: 98 + 100 + 102 sau 96 + 98 + 100 sau 94 + 96 + 98)

III. Un gospodar are-n ogradă iepuri şi curci: 20 capete şi 54 picioare. Câte-s din fiecare? (metoda grafică şi falsa ipoteză).

IV. Eu am 9 ani, iar tata împătritul vârstei mele. Ce întrebări puteţi formula? Scrie în câte o expresie fiecare rezolvare şi alcătuieşte probleme similare. (Câţi ani are tata?; Care este suma vârstelor? Cu cât este mai tânar fiul?)

V. Bunicii au 5 rânduri de pruni, 3 de meri şi 2 de peri, fiecare cu câte 16 pomi. Câţi pomi numără livada? (Se solicită două modalităţi de rezolvare, punere în exerciţiu şi compunere de probleme după formulele numerice rezultate).

Această triadă: rezolvare de probleme, scrierea într-o expresie şi alcătuirea de probleme similare a constituit un algoritm prezent în multe ore de matematică derulate. Se solicită disponibilitatile psihice ale şcolarilor, se întreprind primii paşi în flexibilitatea adaptivă şi fluenţa asociativă, se stimulează imaginaţia creatoare.

Jocurile logico-matematice, problemele nonstandard şi de perspicacitate cultivă spiritul novator, iscoditor, creează o motivaţie intrinsecă, educă trăsături volitive, pozitive de conduită. Prezentăm mai departe o suită de asemenea exerciţii şi probleme distractive, recreaţii matematice, probleme neconforme unor asemenea canoane.

1. La o aniversare se întâlnesc 11 copii. Fiecare dă noroc o singură dată cu ceilalţi. Câte strângeri de mână au loc?
2. Cunosc un număr. Jumătate reprezintă a treia parte din el. Află acel număr.
3. Din 8 de 8 şi semnul + să obţii … 1000. Cum?
4. Completează seriile de mai jos:
   a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, …, …, …;
   b) 98, 76, …, 32, 10;
   c) …, …, …, …, 5, E, 7, G, 9, 1;
   d) 2, 3, 5, 9, 17, …, …, …;
   e) 1, 10, 10, 2, 20, 40, …, …, …, 4, 40, 160;
   f) 45, 54, 23, 32, 96, …, …, 71.
5. Care este valoarea lui x din egalitatea: $x \cdot 2 \cdot 2 + x \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + x \cdot 4 = 350$?

6. Ce relaţie descoperi între primul şi al doilea rând de date?

3	4	5	6	7	8
29	39	49	59	69	79

7. Din trei creioane poţi face …patru, fără a rupe sau a adăuga vreunul?

8. Jocul *Aflarea vârstei*. Se solicită vârsta interlocutorului. O înmulţeşte cu 2, adună 5 şi măreşte de 5 ori. (Din rezultat se exclude ultima cifră, se scade 2 şi se descoperă vârsta.)

9. Plasaţi semne de operaţie şi paranteze: 6…6…6…6…6…6 = 5

10. Rezolvă: 100 porumbei…………………100 kg orz……………………..100 zile
10 porumbei……………………? kg orz………………………..? zile

11. Cât cântăreşte o lădiţă goală, dacă plină cu cireşe are 14 kg, iar pe jumătate plină 8 kg?

12. Câte numere de 3 cifre există, în care suma S + Z + U este 4?
a) 6; b) 9; c) 10; d) 17.

13. Completaţi căsuţele cu numere naturale astfel încât suma pe fiecare linie, coloană sau diagonală să fie 27.

		11
	9	
		3

14. ORAR
PITEŞTI
TEATRU

Privind cu atenţie cele trei cuvinte descoperi… un număr!

Am punctat câteva aspecte, dintr-o multitudine de alternative metodologice care se repercutează pozitiv în pregatirea matematică a micilor discipoli. În concluzie, această disciplină nu este *sperietoare şcolară*, iar psihologii au demonstrat că tocmai disciplinele *perfect logice* pot fi învăţate mai uşor şi mai devreme de către copii.

Bibliografie

[1] Burtea, G., Arghirescu, A., Nedelcu, F., *Matematică şi logică pentru şcolari*, Ed. Corint, Bucureşti, 1995.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 56-63

O CLASIFICARE CINEMATICĂ A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

Mihaela SINGER
Institutul de Ştiinţe ale Educaţiei
Bucureşti

Cristian VOICA
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea din Bucureşti

A KINEMATICAL CLASSIFICATION OF MATHEMATICS PROBLEMS

Abstract. In order to identify the underlying way of thinking involved in constructing and solving problems, it is necessary to use more sophisticated ways to classify problems than the teacher usually does. How can the mathematics problems be classified? In this paper, we propose a classification based on a kinematical point of view.
For the dynamic model generated by the text of the problem, we use the following two categories:
• *dynamic* – the problem assuming a motion of a configuration, a transformation of a context, or some degrees of freedom which lead to several possible results;
• *static* – the problem does not assume motion or variation of data.
This classification equally refers to the text of the problem as well as to the cognitive processes involved in problem solving activities. This classification groups the problems in two disjoint classes. In other words, each problem belongs to a single class of the two categories.
Due to the fact that this classification emphasizes some complex features of problems, sometimes it is not obvious to which category a specific problem belongs. For instance, problems with similar text can be situated in different classes, since the essential criteria is the dynamics of the content. In the paper, we analyze such problems, and explain how the classification operates.
This classification is pertinent because some important mathematical concepts have a dynamic nature and, therefore, they can be learned easierly in a dynamic context. The teacher can use such a classification in balancing the distribution of problems and applications discussed during mathematics lessons.

1. Introducere

Clasificarea problemelor nu este un subiect nou în didactica matematică: de fapt, orice profesor utilizează diverse criterii personale, atunci când îşi alege aplicaţiile pentru clasă. O clasificare cât de cât argumentată nu poate însă folosi criterii subiective, de tipul *problemă frumoasă* sau *problemă grea*. De aceea, în orice încercare de acest tip se ajunge invariabil la întrebarea: ce criterii am putea folosi pentru o clasificare cât mai obiectivă?

Există multe posibilităţi de a clasifica problemele de matematică. Clasificări pur formale se pot face în funcţie de domeniul larg în care se încadrează problema (algebră, geometrie, analiză, trigonometrie), în funcţie de numărul de cuvinte din enunţ sau în funcţie de cerinţă (de exemplu, *probleme de concurenţă* sau *probleme care se rezolvă prin ecuaţii*). O clasificare se poate face în acord cu percepţia rezolvitorului sau propunătorului (probleme *uşoare* sau probleme *grele*). Alte clasificări pot fi făcute după clasa căreia i se adresează problema sau după scopul urmărit prin rezolvare (de exemplu, probleme de examen sau de olimpiadă).

Este evident însă că toate aceste clasificări sunt relative: ele depind de o multitudine de factori, ce ţin de propunător/ profesor, de rezolvitor/ elev, cât şi de contextul în care se face clasificarea. În momentul în care o aceeaşi problemă poate fi considerată şi uşoară, dar şi grea, sau poate fi încadrată atât printre problemele de algebră, cât şi printre cele de geometrie, clasificările nu funcţionează.

Pentru a depista modul de gândire implicat în construirea şi rezolvarea de probleme, taxonomia folosită trebuie să aibă în vedere criterii mai profunde decât cele enunţate mai sus.

Înteresul nostru pentru o clasificare obiectivă a problemelor a pornit de la analiza problemelor propuse şi a răspunsurilor elevilor, pe parcursul a mai mulţi ani, la concursul internaţional Cangurul. Aceste probleme sunt selectate de profesori din întreaga lume, dintr-un set de probleme puse la dispoziţie de ţările participante. Ulterior, organizatorii din fiecare ţară decid asupra distribuţiei problemelor pe clase. Datorită numărului mare de participanţi, analiza răspunsurilor date de elevi poate furniza informaţii statistice relevante.

2. Categorii de probleme

Clasificarea pe care o propunem are în vedere asocierea dintre o problemă dată şi două categorii de parametri, referitori la conţinut, respectiv la meta-conţinut.

Conţinutul problemei priveşte încadrarea acesteia în categoriile: calcul, geometrie, logică, relaţii, organizarea datelor. Aceste categorii de conţinut apar, de exemplu, în [1]. Pentru a evita eventualele neclarităţi, problemei îi corespund o categorie dominantă (primară) de conţinut şi, eventual, o categorie secundară de conţinut.

Meta-conţinutul problemei este clasificat prin determinarea variabilei corespunzătoare fiecăreia dintre categoriile următoare:

1. natura contextului problemei: *practic – cotidian versus teoretic;*
2. distanţa între enunţul problemei şi exprimarea acestuia în limbaj formal (standard): *standard versus non-standard;*
3. codul de procesare dominant pentru lectura enunţului şi obţinerea soluţiei: *lingvistic versus iconic;*
4. procedura de construcţie a modelului problemei: *algoritmic versus creativ;*
5. dinamismul modelului generat de enunţul problemei: *static versus dinamic;*
6. dimensionalitate: *dimensiunea poate fi 0 , 1, 2 sau 3.*

În particular, pentru problemele propuse în cadrul concursului Cangurul, dar şi pentru alte probleme despre care există informaţii de natură statistică, putem considera în plus *gradul de dificultate* – dat de procentul de rezolvări corecte ale problemei per lot. Aceasta este o evaluare statistică, raportată la lotul de elevi şi nu la problema în sine.

Lucrarea de faţă se focalizează pe discutarea categoriei *static-dinamic*: aceasta este o categorie mai amplă, care are nevoie de precizări detaliate pentru a putea fi înţeleasă.

3. Clasificarea static versus dinamic

Din punctul de vedere al *dinamismului modelului generat de enunţul problemei*, clasificarea propusă lucrează cu următoarele definiţii.

- *Dinamic* – enunţul problemei presupune o deplasare a unei configuraţii, o evoluţie a unui context, sau considerarea unor grade de libertate ce conduc la mai multe rezultate posibile.
- *Static* – enunţul problemei nu presupune mişcare sau variabilitate a unor date.

Clasificarea se referă, în egală măsură la enunţul problemei şi la căile de rezolvare a acesteia. În continuare, propunem o listă de exemple, pentru a explica diferenţierile care intervin între cele două categorii şi a genera premise pentru catalogări obiective.

4. Exemple [1]

4.1. Probleme în care analiza se face *pas cu pas*

Care din următoarele numere, înmulţit cu 768, dă un număr având la sfârşit cel mai mare număr de zerouri?

***A)** 7500* ***B)** 5000* ***C)** 3125* ***D)** 2500* ***E)** 10000*

Aceasta este o problemă *statică*, deoarece presupune doar efectuarea produselor dintre numerele corespunzătoare variantelor propuse şi 768.

Pentru a vedea cum se diferenţiază o astfel de problemă de varianta ei dinamică, să considerăm un enunţ de tipul: *care dintre numerele până la 10 000, înmulţit cu 768, dă un număr având la sfârşit cel mai mare număr de zerouri*?

Acesta este de tip dinamic, deoarece:

- presupune o funcţie liniară $x \rightarrow 768\,x$, care suprapune o mulţime peste o altă mulţime; această suprapunere se realizează prin imaginarea modului în care se modifică configuraţia iniţială (adică mulţimea numerelor naturale de la 1 la 10000);
- faţă de exemplul anterior, nu se poate ajunge la rezultat prin efectuarea tuturor calculelor; la un moment dat trebuie aplicat un raţionament care scurtează calea spre rezultat(e);
- există mai multe rezultate posibile, obţinute ca urmare a analizei situaţiilor posibile.

4.2. Probleme de pus în ecuaţie

În colivie sunt 5 papagali. Media preţurilor lor este 60 euro. Într-o zi, un papagal a zburat pe fereastră. Media preţurilor celor rămaşi este 50 euro. Care este preţul papagalului pierdut?

***A)** 10 euro* ***B)** 20 euro* ***C)** 55 euro* ***D)** 60 euro* ***E)** 100 euro*

[1] Toate problemele analizate sunt propuse la concursul Cangurul, în anii 2004 şi 2005.

Prima parte a enunţului conturează o configuraţie care poate fi descrisă printr-o ecuaţie. A doua parte a enunţului conduce la modificarea configuraţiei iniţiale, ceea ce generează o a doua ecuaţie, care nu este echivalentă cu prima. În acest mod, este generat modelul problemei, descris printr-un sistem de ecuaţii şi obţinut ca descriere a contextului în două ipostaze diferite. De aceea, aceasta este o problemă *dinamică.*

Problema anterioară se exprimă printr-un sistem de două ecuaţii. Ecuaţiile/ sistemele ca atare (cu mulţimea de soluţii dată de formula de rezolvare) sunt probleme *statice*, chiar dacă, pe parcursul rezolvării, acestea se simplifică prin transformări echivalente. Tot printr-o ecuaţie/ sistem de ecuaţii se exprimă şi problema următoare, dar aceasta este o problemă statică:

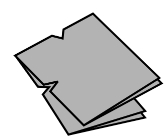
Ann şi Betti au împreună 10 acadele, dar Betti are cu două mai multe decât Ann. Câte acadele are Betti?

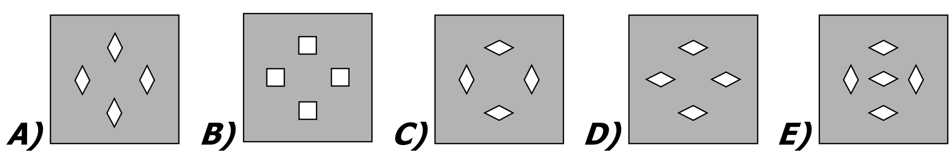
A) *8* ***B)*** *7* ***C)*** *6* ***D)*** *5* ***E)*** *4*

În problemele care generează ecuaţii sau sisteme de ecuaţii, modelul problemei poate fi generat în urma unor *transformări* (de tipul: transformare geometrică, deplasare în plan sau în spaţiu, proiecţie, desfăşurări de corpuri geometrice, modificări de altă natură ale contextului iniţial), sau poate fi obţinut prin *descrierea* contextului dat. În prima situaţie, avem o problemă dinamică, în timp ce în a doua situaţie problema este statică.

4.3. Probleme de geometrie

Pliez o foaie de hârtie pătrată în patru, o decupez ca în figură şi apoi o desfac. Ce obţin?



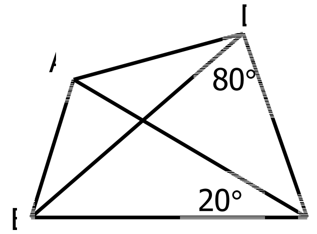


Aceasta este o problemă *dinamică*: chiar dacă nu realizăm practic împachetarea şi despachetarea hârtiei, rezolvarea se face doar prin imaginarea modului în care se fac aceste operaţii. Deplasarea sau schimbarea poziţiei, chiar şi în gând, a unei configuraţii geometrice, caracterizează problemele dinamice.

Nu orice problemă de geometrie este, însă, dinamică. Să analizăm următorul exemplu.

În patrulaterul ABCD, diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC şi AC=BC. Ştiind că m(∠BDC)= 80° şi m(∠ACB)= 20°, atunci m(∠BAD) este:

A) *90°;* ***B)*** *100°;* ***C)*** *110°;* ***D)*** *120°;* ***E)*** *135°.*



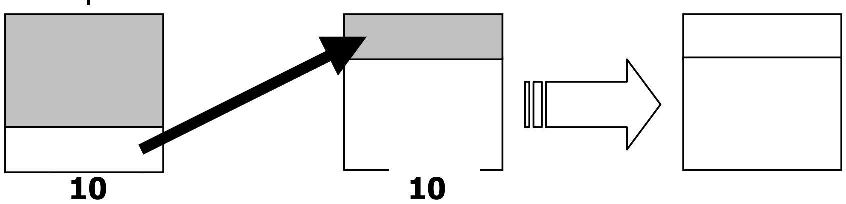
Desigur, această problemă se rezolvă prin completarea configuraţiei iniţiale cu noi date (măsurile unora dintre unghiurile de pe figură). Această completare nu este, însă, o modificare a contextului iniţial al problemei şi nici nu are loc o deplasare a acestei configuraţii. De aceea, problema anterioară este statică.

4.4. Probleme care conduc la un model figural

Scufiţa Roşie are în două coşuri câte 10 plăcinte, cu mere şi cu brânză. Bunicuţa a luat câteva plăcinte din primul coş, iar din al doilea coş atâtea plăcinte câte au mai rămas în primul coş. Câte plăcinte are acum Scufiţa Roşie?

A) *5* ***B)*** *10* ***C)*** *15* ***D)*** *20* ***E)*** *25*

În rezolvarea acestei probleme, elevul transformă modelul iniţial, care implică două coşuri, într-un model care implică doar un coş. Practic, rezolvarea problemei are loc după schema următoare:



Ca urmare, aceasta este o problemă de tip dinamic.

Problema următoare presupune de asemenea un raţionament logic (neglijarea unor date nerelevante) şi o regulă aditivă de rezolvare. Ea este însă o problemă statică, deoarece nici enunţul, nici rezolvarea nu presupun evoluţie sau schimbare.

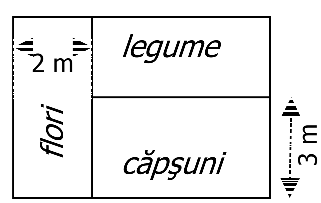
În sală sunt 6 mese cu câte 4 scaune, 4 mese cu câte 2 scaune şi 3 mese cu câte 6 scaune. Câte mese sunt?
A) *40* ***B)*** *25* ***C)*** *50* ***D)*** *36* ***E)*** *13*

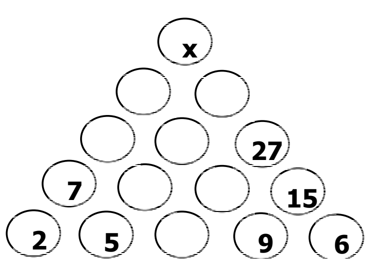
În rezolvarea acestei probleme, este necesară imaginarea configuraţiei (repartiţia obiectelor din problemă într-o diagramă). Efectuarea directă a operaţiilor sugerate conduce la un răspuns eronat.

4.5. Probleme în care se completează date intermediare

Să comparăm următoarele probleme:

1. Grădina dreptunghiulară a familiei Green are suprafaţa de 30 m^2 şi este împărţită în trei parcele dreptunghiulare. Parcela cu flori are 10 m^2. Care este suprafaţa parcelei cu legume?

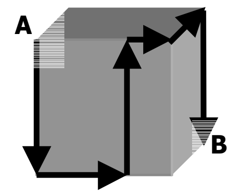




2. Ce număr înlocuieşte x*, dacă triunghiul este completat cu numere după o regulă fixă?*

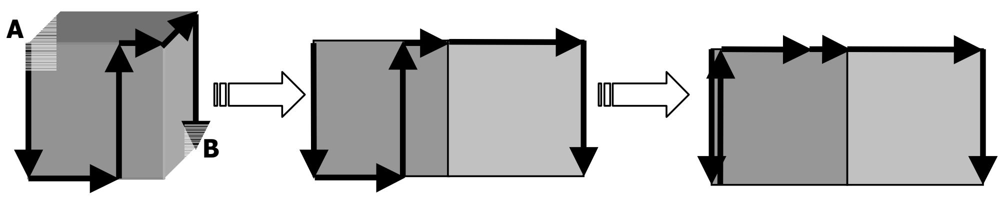
Cele două probleme se rezolvă prin completarea configuraţiilor iniţiale cu noi date numerice. Dar, în timp ce pentru prima problemă se aplică succesiv doar formula de arie a dreptunghiului, în rezolvarea celei de-a doua probleme are loc un raţionament de tip inductiv, care presupune identificarea de analogii şi formularea unor ipoteze plauzibile. De aceea, prima problemă este statică, iar a doua problemă este dinamică.

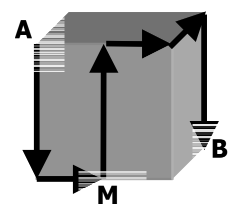
4.6. Probleme care necesită transferul într-o altă dimensiune



Cubul din imagine are latura de 12 cm. Furnica Ann se plimbă pe suprafaţa cubului, din A în B, pe ruta indicată. Cât de mult merge?

Aceasta este o problemă dinamică. Dinamismul nu este dat de mişcarea la care se referă enunţul (problema putând fi enunţată: *care este lungimea drumului marcat pe figură?*), ci de proiecţia plan-spaţiu necesară în rezolvare şi de transformările succesive pe care le facem pentru a rezolva problema. Aceste transformări pot fi făcute mental, desenele care urmează fiind doar un mod de a pune în evidenţă explicit paşii de gândire:





Un caz particular al problemei anterioare este dat de următorul enunţ:
Pe cubul din figura alăturată, care are muchia de 12 cm, punctul M este mijlocul unei laturi. Care este lungimea drumului marcat pe figură?

În acest caz, problema este statică, deoarece se poate rezolva prin însumarea unor lungimi de segmente.

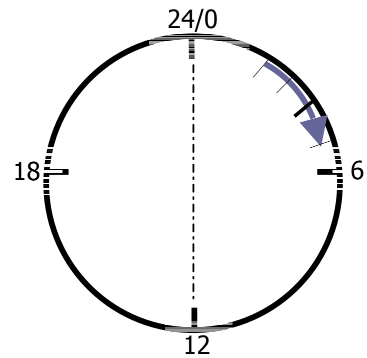
4.7. Probleme cu model ciclic

De la prânz până la miezul nopţii, Înţeleapta Pisică doarme sub castan, iar de la miezul nopţii până la prânz ea povesteşte pisicuţelor întâmplări din tinereţe. Pe tulpina castanului este inscripţionat: acum două ore, Înţeleapta Pisică făcea acelaşi lucru pe care îl va face şi în ora următoare. *Câte ore pe zi este adevărată inscripţia?*

Orice încercare de rezolvare a acestei probleme presupune imaginarea unui model de tipul următor.
Pe cadranul unui ceas, pe care sunt marcate cele 24 de ore dintr-o zi, deplasăm un cursor (marcat, pe figura de mai jos, printr-o săgeată), care acoperă un arc cu *lungimea* de 3 ore. Răspunsul la problemă se obţine prin identificarea poziţiilor cursorului, pentru

care acesta se află în totalitate într-una din cele două jumătăţi ale cadranului (delimitate pe figură de diametrul punctat).

Acest model arată că problema enunţată este dinamică. Observăm că modelul problemei este unul ciclic, exprimarea orelor zilei fiind un exemplu de calcul în grupul aditiv al claselor de resturi modulo 24. Încadrarea problemei în categoria corectă, din punct de vedere cinematic, este, de fapt, cheia în rezolvarea acesteia.



Tot de tip ciclic este şi următoarea problemă:

Furnicuţa Cuţa lucrează 4 zile la rând şi se odihneşte în a 5-a zi. Ea tocmai s-a odihnit luni şi a început lucrul marţi. După câte zile se va odihni iar luni?

Ne putem imagina modelul acestei ultime probleme sub diverse forme: parcurgerea cu paşi de lungimi diferite (aici, 5, respectiv 7) a unei distanţe; angrenaj de două roţi dinţate (una cu 5 dinţi, cealaltă – cu 7 dinţi) etc. Fiecare dintre aceste modele sugerează ciclicitatea, de aceea problema este de tip dinamic.

Mai general, putem spune că problemele care conduc la considerarea celui mai mic multiplu comun a două numere pot fi într-una din următoarele situaţii. Problemele sunt de tip static, atunci când contextul este algebric, adică este vorba despre calculul CMMMC a două sau mai multe numere date. Dacă problema presupune un model ciclic, adică necesită o reprezentare de tipul celor descrise mai sus, atunci aceasta este dinamică.

5. Concluzii

Anterior am văzut că problemele pot fi clasificate în funcţie de natura lor cinematică, iar corecta lor clasificare induce căi de rezolvare optime. O scurtă explorare în istoria matematicii arată că natura cinematică a conceptelor este importantă, dincolo de soluţionarea unor probleme şcolare. Astfel, în momentul apariţiei lor, majoritatea conceptelor matematice au avut o abordare de tip dinamic. Câteva exemple, date în continuare, întăresc această idee.

Grupurile au fost gândite iniţial ca grupuri de transformări geometrice. Vectorii au apărut din fizică, ca modalitate de explicare a mişcării. Integrala presupune un proces de aproximări succesive ale ariei unui domeniu plan. Limita presupune, de asemenea, imaginarea modului de variaţie a termenilor unui şir sau a unei funcţii - şi exemplele ar putea continua.

Analizând diferite manuale, activităţi ale profesorilor, probe date la concursurile şi examenele şcolare, se constată o predilecţie pentru utilizarea problemelor statice, cele dinamice apărând de regulă ca depozitare ale unor capcane, menite să scoată în evidenţă elevii de performanţă.

Pe de altă parte, analiza problemelor relevă că, pe măsură ce elevul avansează ca nivel de şcolaritate, problemele de tip dinamic propuse acestuia devin din ce în ce mai rare. Există tendinţa unei abordări statice inclusiv pentru acele noţiuni care nu pot fi conceptualizate decât printr-un demers dinamic. De exemplu, la geometrie, se preferă contemplarea unui desen în locul manevrării unor corpuri geometrice; transformările geometrice au dispărut aproape complet din programele şcolare, iar măsurarea, care ar presupune în mod normal activităţi efective, se reduce la calcule statice. Concepte ca limita unui şir sau integrala definită şi-au pierdut caracterul dinamic, devenind simple reguli de calcul.

Deoarece apar mai rar, problemele dinamice sunt percepute de către elevi ca fiind mai dificile. Psihologia arată însă că legăturile şi conexiunile între concepte devin efective doar atunci când exersarea este de tip dinamic. De aceea, o echilibrare a raportului static-dinamic poate contribui la îmbunătăţirea performanţelor şcolare.

De exemplu, cazul analizat anterior, referitor la CMMMC, arată că diferenţierea static-dinamic poate sugera o modalitate adecvată pentru a introduce această noţiune: se porneşte de la probleme dinamice, a căror rezolvare se poate face practic, prin explicitarea modelului, apoi se determină multiplii primului număr, ai celui de-al doilea număr şi multiplii comuni şi în final se prezintă o modalitate de calcul.

Sensibilizarea profesorilor în legătură cu existenţa unei clasificări de tipul celei de faţă le-ar permite acestora să îşi orienteze demersul didactic şi să îşi dozeze proiectarea activităţilor desfăşurate la clasă.

În cadrul acestui studiu, am analizat răspunsurile elevilor la problemele propuse la concursul Cangurul, din perspectiva static-dinamic. Datele statistice de care dispunem şi analiza făcută ne-au condus la considerarea următoarei ipoteze: *există o predispoziţie a elevului pentru un anumit tip de problemă*. Dacă această ipoteză se va confirma, ea poate conduce la evidenţierea unui anumit profil al inteligenţelor elevului, structurat în funcţie de categoriile de conţinut şi de meta-conţinut descrise anterior.

Bibliografie

[1] Singer, M., Voica, C., *Matricea de structurare a competenţelor – un instrument util pentru evaluarea eficientă a progresului şcolar,* Proceedings CAIM **10** (2002), 71-76.
[2] Singer, M., Voica, C., *Paşi în înţelegerea rezolvării problemelor,* Ed.Sigma, Bucureşti, 2003.
[3] Singer, M., Voica, C., *Învăţarea matematicii. Elemente de didactică aplicată,* Ed.Sigma, Bucureşti, 2002.
[4] Singer, M., Voica, C., *Didactica Algebrei,* Ministerul Educaţiei şi Cercetării, Bucureşti, 2005.
[5] Singer, M., Voica, C., *Cum demonstrăm? De la intuiţie la rigoare matematică,* Ed.Sigma, Bucureşti, 2005.
[6] ****Concursul European de Matematică Aplicată Cangurul,* Ed.Sigma, Bucureşti, 2004.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 64-72

UN STUDIU PRIVIND ÎNVĂŢAREA SPAŢIILOR VECTORIALE

Mihai Sorin STUPARIU **Cristian VOICA**
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea din Bucureşti

LEARNING VECTOR SPACES

Abstract. The concept of vector space is one of the most important concepts in mathematics. It is not important only for itself, but also for the fact that the understanding of the vector spaces is fundamental in order to learn a large number of other concepts.
Although the direct proportionality (and, consequently, the linearity) seems to be one of the most accessible models for the human mind, we drawn the conclusion that the undergraduate students have difficulties in learning linear algebra. In our paper, we reveal some of these difficulties and we try to understand why they occur.
We find that there is a type of *asymmetry* in representing and proving the fact that a given system of vectors spans the vector space, versus its linear independence property. While the former is better explained geometrically, for the latter the students prefer the numerical approach.
Another remark is that the students can easily represent geometrically properties of vector spaces of dimensions two or three, but they have some difficulties in representing and operating with vectors on a line.
These remarks could help the lecturers improve their teaching: general facts from linear algebra are better understood using geometrical examples in dimension two or three.

1. Introducere

Proporţionalitatea directă pare să fie unul dintre modelele cele mai accesibile pentru mintea umană. Studii recente (de exemplu, [1], [3] şi [7]) arată că există o tendinţă naturală a elevilor, a studenţilor şi chiar a adulţilor să identifice şi să aplice preponderent modele liniare, adică să interpreteze variaţii diverse prin intermediul proporţionalităţii directe. Autorii citaţi denumesc această predispoziţie *illusion of linearity*.

În matematică, algebra liniară este una dintre disciplinele fundamentale ale matematicii actuale, deoarece ea are multiple legături cu majoritatea domeniilor de studiu: liniaritatea apare în algebră, geometrie, analiză, mecanică, economie, informatică, fizică, etc. În fiecare dintre aceste domenii, liniaritatea intervine în mod diferit: în algebră furnizează un exemplu de structură (spaţiul vectorial), în geometrie este necesară în introducerea unor concepte (spaţiu afin sau euclidian), iar în informatică este un instrument de lucru (procesarea vectorială a imaginilor). Această diversitate ar trebui să se reflecte în reprezentări mentale variate ale conceptelor care intervin, adaptate domeniului specific de studiu.

Existenţa unei percepţii primare a liniarităţii, precum şi faptul că algebra liniară este invocată în majoritatea cursurilor universitare, încă din anul I, ar putea conduce la ideea că spaţiile vectoriale reprezintă una dintre cele mai accesibile teme din matematică.

Contrar acestei percepţii, constatăm că, la sfârşitul studiilor, relativ puţini studenţi au cunoştinţe (chiar vagi!) de algebră liniară. Mai mult, studenţii care cunosc definiţii sau rezultate asupra liniarităţii nu au decât reprezentări unilaterale ale noţiunilor vectoriale.

Studiul nostru şi-a propus iniţial să identifice dificultăţi în înţelegerea de către studenţi a noţiunilor de algebră liniară. Ulterior, am început să fim interesaţi şi de modul în care studenţii reuşesc să îşi formeze reprezentări multiple ale unor concepte. Mai precis, ne-a interesat corelaţia între reprezentarea algebrică/ abstractă a noţiunilor de vector, independenţă liniară şi bază, şi, respectiv, reprezentarea geometrică a aceloraşi noţiuni. În această lucrare, prezentăm rezultatele şi concluziile la care am ajuns până acum.

2. Metodologie

Pentru a obţine informaţii despre modul în care studenţii au înţeles noţiunile de algebră liniară, am procedat în două moduri. Mai întâi, am adresat chestionare unor studenţi din anii II şi IV/V de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti. Chestionarele au cuprins următoarele 6 întrebări.

1. *În ce moment (clasă/an de studii/curs) aţi auzit pentru prima dată despre spaţii vectoriale?*
2. *Scrieţi cinci elemente ce ţin de matematica din liceu, despre care credeţi că sunt utile în studiul spaţiilor vectoriale.*
3. *Aţi învăţat despre spaţii vectoriale la diferite cursuri din anul I. Aţi mai folosit şi ulterior aceste noţiuni? Dacă da, precizaţi unde.*
4. *Dacă nu aţi reţinut nimic despre spaţiile vectoriale, scrieţi mai jos NU şi treceţi la întrebarea următoare. Dacă vă mai amintiţi câte ceva, scrieţi cel mai important rezultat (enunţ) pe care îl mai ştiţi.*
5. *Dacă aţi fi în situaţia de a preda un capitol de spaţii vectoriale, cu ce anume aţi începe? (Adică aţi porni dinspre geometrie, algebră sau mecanică?)*
6. *Următoarele propoziţii se referă la dificultăţi posibile în înţelegerea spaţiilor vectoriale. Bifaţi-le pe acelea despre care credeţi că se potrivesc în cazul vostru:*
   - *(a) nu am avut suficiente exemple;*
   - *(b) nu am înţeles utilitatea spaţiilor vectoriale;*
   - *(c) spaţiile vectoriale au fost predate la mai multe cursuri şi s-au schimbat notaţiile;*
   - *(d) nu am ştiut să fac eu singur/singură aplicaţii;*
   - *(e) au fost prea multe rezultate şi nu am avut timp să le aprofundez;*
   - *(f) alt motiv, şi anume...*

Ulterior, am selectat 9 studenţi din anii terminali, cărora le-am luat interviuri (înregistrate audio), privitoare la tematica studiată. În general, interviurile au vizat reprezentarea geometrică a unor noţiuni precum: combinaţie liniară, dependenţă liniară, bază.

În total, au participat la diferite forme de interacţiune 84 de studenţi.

3. Rezultatele studiului

3.1. Analiza chestionarelor

Răspunsurile la chestionare sunt interesante din două perspective. Pe de o parte, am obţinut informaţii despre ceea ce au înţeles studenţii privitor la spaţiile vectoriale sau despre dificultăţile lor în învăţare. Pe de altă parte, răspunsurile studenţilor la unele dintre întrebări pot constitui puncte de reper în îmbunătăţirea metodelor de predare.

Am constatat că, pe măsură ce se îndepărtează de anul I, studenţii par să îşi amintească din ce în ce mai puţine rezultate/enunţuri privind spaţiile vectoriale: dacă studenţii din anul II (care folosesc încă frecvent, la diverse cursuri, noţiunile respective) pot enunţa rezultate sau definiţii relativ corecte, majoritatea studenţilor din anii IV/V răspund *NU* la întrebarea 4 din chestionar. Aceasta arată că dificultăţile iniţiale de înţelegere a noţiunilor de algebră liniară au determinat uitarea completă a acestora. Este relevant următorul răspuns: *Am reţinut, dar foarte vag şi nu pot să reproduc.*

Dificultăţile în învăţare cel mai frecvent menţionate de către studenţi evidenţiază dualitatea *rezultate prea multe – exemple prea puţine*. Este posibil ca aceste dificultăţi să aibă mai multe cauze, de aceea am reluat întrebările pe această temă şi în interviuri.

În general, cursurile *academice* tind să epuizeze subiectul propus. Un astfel de curs poate părea prea *stufos* studentului din anul I, care nu are abilitatea să facă o selecţie a rezultatelor cu adevărat importante. De aceea, modul în care studentul îşi prelucrează informaţia devine esenţial în facultate. În plus, învăţământul liceal dezvoltă insuficient capacitatea elevului de a-şi găsi singur exemple sau contraexemple relevante pentru susţinerea propriilor idei. Următorul comentariu la întrebarea 6 este sugestiv.

Lidia (anul II): *Dacă ar exista vreun motiv, atunci ar ţine de modul în care îmi structurez şi prelucrez informaţia şi nu de modul în care aceasta a fost prezentată şi exemplificată.*

3.2. Interviurile

Prelucrarea interviurilor cu studenţii a furnizat informaţii asupra modului în care ei îşi reprezintă mental conceptele de algebră liniară, precum şi motivaţii ale dificultăţilor lor în învăţare.

Stilul diferit de predare între liceu şi facultate poate provoca un adevărat *şoc* proaspătului student (analizat, de exemplu, în [6]). De aceea, este posibil ca unele noţiuni învăţate în anul I de facultate (spaţiile vectoriale, de exemplu) să fie mai greu înţelese, deoarece studenţii se acomodează cu dificultate modului diferit de predare. Această schimbare este deseori invocată, atât în teste, cât şi în interviurile realizate:

Andrei (anul V): *Abia prin anul II am realizat că problema era de fapt diferenţa dintre matematica de liceu şi cea de la facultate şi anume: liceu – 30%-teorie, 70%-probleme, facultate – 70%-teorie, 30%-probleme (aproximativ). Ar trebui mai multă atenţie din partea profesorilor faţă de studenţii din anul I, pentru că* *aceştia au nevoie de o bună bucată de timp ca să se acomodeze cu noul stil de predare.*

Renunţarea la desen, ca mod de transmitere sau de concretizare a informaţiei, este considerată de către studenţii intervievaţi ca principal factor ce influenţează negativ înţelegerea. De fapt, desenul facilitează formarea unor reprezentări multiple ale conceptelor, în sensul dat de H.Gardner [4]. Următoarele comentarii sunt relevante.

-Sunt utile spaţiile vectoriale? Sau se fac degeaba? Le-ai mai întâlnit şi la alte materii?

Alexandru (anul IV): *- Le-am întâlnit, dar... ce voiam să vă spun: eu în anul I chiar nu am înţeles la spaţii vectoriale...*

-Dar care e motivul pentru care nu ai înţeles?

-Nu puteam, am fost învăţat în liceu cu altfel de geometrie şi aici, de exemplu, primele două luni nu ni s-a făcut absolut nici un desen. (...) Cred că dacă mai şi vezi ce scrie, înţelegi mai bine, nu ştiu... De exemplu noi în anul I nu prea am făcut grafice, chestii din astea sau... totul se făcea pur algebric.

Mariana (anul IV): *Ar fi fost bine să ni se explice aşa, cu desene... că eu, de exemplu, nu ştiu să desenez, nu ştiu... Asta ar ajuta, deoarece reţii mai bine ceva când vezi figura decât dacă sunt de teorie...*

Ne-am putea aştepta ca studenţii să poată face singuri legătura între noţiunile de algebră liniară (cum ar fi dependenţa şi independenţa liniară) şi operaţiile cu vectori din plan sau din spaţiu, exersate, de exemplu, la orele de fizică din liceu. Astfel, ei ar putea să îşi formeze reprezentări multiple ale acestor noţiuni. Pentru a verifica această ipoteză, am adresat studenţilor intervievaţi întrebări de tipul: *Dă un exemplu de spaţiu vectorial. Desenează în plan/spaţiu o bază (sau un sistem liniar independent sau un sistem de generatori). Cum justifici?*

În general, studenţii intervievaţi au putut enunţa o definiţie (cel puţin aproximativă) a spaţiului vectorial. Unii dintre ei au folosit un limbaj preponderent algebric:

Mădălina (anul IV): *Deci (spaţiul vectorial, n.n.) e o mulţime înzestrată cu două operaţii, una interioară şi una exterioară ... cu operaţia aceea interioară trebuie să formeze grup şi operaţia exterioară trebuie să aibă anumite proprietăţi.*

Steluţa (anul IV): *Păi operaţiile... deci facem sumă de vectori, înmulţire cu scalari…*

Atunci când am solicitat acest lucru, studenţii intervievaţi au putut descrie (geometric) operaţiile cu vectori şi au explicat structura de spaţiu vectorial a vectorilor din plan/spaţiu:

Mădălina (anul IV): *Încerc să îmi dau seama ce înseamnă suma vectorilor... este diagonala paralelogramului determinat de ei* (fig. 1).

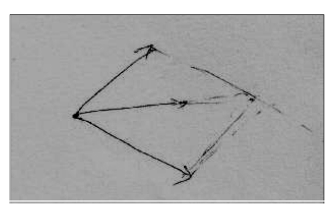
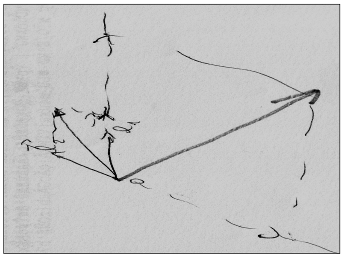


Fig.1.
Desenul făcut de Mădălina.



Daniel (anul IV): *Vectorul 3**e₁** e tot un vector, care s-ar reprezenta de-a lungul dreptei suport a vectorului **e₁**, cu lungimea egală de trei ori lungimea lui* (fig.2).

Fig.2.
Desenul făcut de Daniel.

Dificultăţile au apărut atunci când studenţii au trebuit să justifice *geometric* proprietăţi ale unor sisteme de vectori.

În demonstrarea faptului că mai mulţi vectori formează *sistem de generatori*, studenţii sunt conştienţi că este nevoie să descompună un vector dat după direcţiile vectorilor din sistem.

Ezitările sau confuziile lor se manifestă în modurile descrise mai jos.

a) Unii studenţi folosesc doar descompuneri prin proiecţii ortogonale; pentru ei, bazele pot fi doar sisteme ortogonale (sau chiar ortonormate) de vectori.

- Dar alte baze în afară de ăia doi vectori pe care i-ai pus acolo (n.n. versorii axelor) mai ai pentru plan?
- Raluca (anul IV): *Cred că şi ăsta... ăsta cu ăsta.* (n.n. Este vorba despre versorii bisectoarelor, v. fig. 3.)
- Să înţeleg că sunt tot vectori perpendiculari?
- *Da.*
- Şi baze... în orice bază ai doi vectori, pentru plan?
- *Da.*
- Şi musai sunt perpendiculari?
- *...cred că da...*
- Şi musai de lungime unu, aşa cum par să îi fi pus acolo?
- *Cred ca da.*

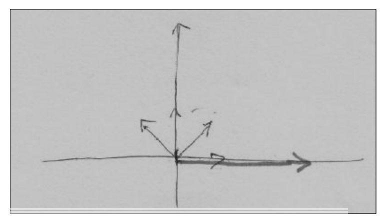


Fig.3.
Raluca a desenat două baze ortonormate.

Predispoziţia studenţilor pentru baze ortonormate poate fi explicată prin utilizarea *limbajului algebric* (în sensul folosit de Hillel, [5]) în predarea spaţiilor vectoriale. Mai precis, Hillel identifică trei limbaje utilizate în algebra liniară: *limbajul abstract*, *limbajul algebric* şi *limbajul geometric*.

În Universitate, algebra liniară este predată mai întâi la cursul de Geometrie, unde spaţiile vectoriale sunt folosite ca instrument pentru introducerea spaţiilor afine sau a celor euclidiene. De aceea, limbajul folosit de regulă la curs este cel algebric, adică se utilizează în mod curent lucrul cu coordonate din $\mathbf{R}^n$.

Ca o consecinţă, am constatat că, atunci când trebuie să argumenteze proprietăţi exprimate în alt limbaj (de exemplu, în cel geometric), studenţii preferă să exprime configuraţia dată în limbaj algebric. Un exemplu este prezentat în figura 4.

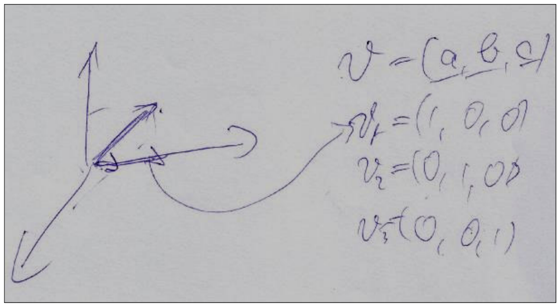


Fig. 4.
Desenul făcut de Steluţa (anul IV) pentru a explica de ce versorii axelor de coordonate formează o bază în $\mathbf{R}^3$.

O altă posibilă explicaţie este legată de modul în care sunt predate noţiunile de algebră liniară în liceu. De regulă, se trece rapid de la reprezentarea geometrică a vectorilor, la reprezentarea acestora în coordonate carteziene. Folosirea bazei canonice {**i**, **j**, **k**} simplifică lucrurile pe moment, dar le crează elevilor impresia că aceasta este unica bază posibilă. Studenţii afirmă că liceul le-a format cele mai solide convingeri matematice; este posibil ca aceste cunoştinţe să le influenţeze modul de percepere a conceptelor şi în facultate, în ciuda apariţiei unor noi modele de gândire.

Daniel (anul IV): *Evident, (mă gândesc la perpendicularitate, n.n.) deoarece cunoştinţele pe care le stăpânesc cel mai bine în domeniul geometriei sunt cele din liceu... Şi în liceu ştiam că orice vector din spaţiu aş putea să îl reprezint în funcţie de cele 3 coordonate, care erau perpendiculare 2 câte 2.*

b) Alţi studenţi reuşesc să facă descompuneri (cu regula paralelogramului) doar în cazul în care vectorii au o anumită poziţie.

De exemplu, Daniel (anul IV) nu reuşeşte să descompună vectorul ***v*** din figura 5 după vectorii $\boldsymbol{e_1}$ şi $\boldsymbol{e_2}$, aleşi de el ca bază. (Pe figură, notaţiile ***v*** şi ***u*** au fost adăugate de noi, pentru mai multă claritate.) Iniţial, Daniel crede că, pentru descompunerea acestui vector, este nevoie să rotească baza dată:

-Cred că este posibil dacă facem anumite transformări ale bazei... o rotaţie ... şi atunci am putea să descompunem...

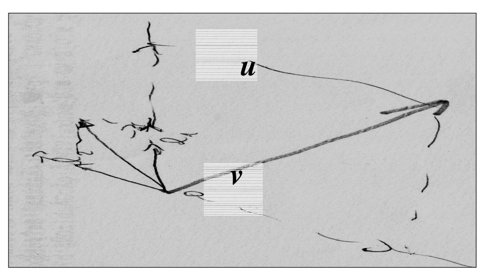


Fig.5.
Desenul făcut de Daniel pentru a descompune vectori după direcţii date.

Ulterior, după desenarea vectorului ***u***, Daniel revine şi reuşeşte să facă şi descompunerea lui ***v***.

-Mă gândesc că şi aşa se poate face... şi avem vectorii aici... unul aici ... şi acesta este ***e₂****, dar cu minus ... şi avem tot regula paralelogramului...*

Suntem aici în prezenţa unei fixaţii a reprezentării prin desen, de acelaşi tip cu cele întâlnite la elevii din şcoala generală: unii elevi din clasele a VI-a – a VII-a percep triunghiul dreptunghic, rombul sau trapezul doar dacă sunt desenate ca în figura 6.

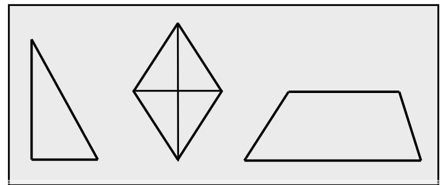


Fig.6.
Desene standard ale unor figuri geometrice.

Alte întrebări au vizat studiul *liniar independenţei* unor vectori, exprimat în limbaj geometric.

a) De fiecare dată când sunt date argumente corecte şi complete, acestea ţin de reprezentarea algebrică a noţiunilor; studenţii preferă să exprime liniar (in)dependenţa prin intermediul sistemelor, determinanţilor sau rangului unei matrice.

Felicia (anul IV): *Este bază, pentru că putem demonstra în mai multe feluri. Putem demonstra algebric că este liniar independentă şi ştim că dimensiunea spaţiului este doi.(...) Trei vectori sunt liniar independenţi dacă luând... rezolvând sistemul a ori primul vector plus b ori al doilea vector plus c ori al treilea vector egal cu zero, rezultă automat că a, b şi c sunt zero. (...) Sau ... Că sunt liniar independenţi... nu, acum mă gândeam la determinant... că ei puteau să fie aşezaţi într-un determinant ... Un determinant, da... şi trebuia să aibă rangul... liniar independenţi... trebuia să aibă rangul maxim. Deci rang trei. Determinant diferit de zero.*

b) Majoritatea studenţilor intervievaţi nu au putut însă furniza justificări coerente privind liniar independenţa a doi vectori din plan, sau a doi/ trei vectori din spaţiu.

Atunci când studenţii dau o oarecare justificare, formularea *trei vectori sunt liniar dependenţi, dacă unul dintre ei se poate scrie în funcţie de ceilalţi doi*, ţine loc de argument. Din păcate, ei se încurcă în explicarea a ceea ce înseamnă *în funcţie de*...:

Mădălina (anul IV): *Dacă am trei vectori, în plan, cred că pe unul pot să îl scriu în funcţie de ceilalţi doi. Păi asta încercam să mă gândesc, cum pot să îl scriu ... ca sumă... de vectorii ăştia doi.*

Am constatat că justificările în limbaj geometric, date pentru liniar independenţa unor vectori, sunt mult mai ambigue decât justificările date, în acelaşi limbaj, pentru a arăta că mai mulţi vectori formează un sistem de generatori.

O posibilă cauză este faptul că vectorul nul este prea puţin înţeles şi folosit: acest fapt pare să fie de aceeaşi natură cu apariţia târzie a numărului 0 în matematică.

O altă cauză poate fi diferenţa ce ţine de logica matematică, diferenţă care apare între definiţiile celor două concepte: în timp ce liniar independenţa presupune cuantificatorul universal, deci conduce la *demonstraţie*, sistemul de generatori este definit cu ajutorul cuantificatorului existenţial, ceea ce conduce la *exemplificare.* Argumentarea *geometrică* este şi ea de natură diferită. Pentru a justifica dacă mai mulţi vectori formează sistem de generatori, trebuie să descompunem un vector dat după vectorii din sistem, conform definiţiei. În justificarea liniar independenţei, este nevoie însă de o prelucrare prealabilă a definiţiei, adică de un raţionament de natură atât logică, cât şi algebrică. Poate că această transformare (exprimată de studenţi, în interviuri, doar prin formulări aproximative), este cea care determină dificultăţile de argumentare în limbaj geometric. Menţionăm că toate argumentele de natură algebrică, date de către studenţi pentru liniar independenţa unor vectori, folosesc definiţia *brută*, şi nu prelucrări echivalente ale acesteia. Atunci când sunt totuşi enunţate prelucrări ale definiţiei, acestea sunt vagi şi incomplete.

În [2], Fischbein face distincţie între intuiţia primară şi intuiţia secundară. În timp ce intuiţia primară se dezvoltă *independent de orice instruire sistematică, ca efect al propriei experienţe*, intuiţia secundară se dezvoltă *nu în mod natural, ci ca urmare a intervenţiilor educaţionale*. Studiile [1], [3] şi [7], citate şi în introducere, arată că elevii au o bună intuiţie primară a liniarităţii. Metodele de învăţare, mai ales din universitate, îi împiedică însă pe studenţi să îşi formeze o intuiţie secundară profundă: înţelegerea conceptelor rămâne doar la nivel declarativ.

Transformarea intuiţiei primare (exprimată prin manevrarea *naturală* a proporţionalităţii directe de către copil) în intuiţie secundară (adică sesizarea liniarităţii, ca proprietate a unor contexte complexe) se realizează numai prin înţelegerea metodelor specifice algebrei liniare şi aplicarea lor corespunzătoare. Rigoarea nu este însă suficientă: unii studenţi cunosc definiţii formale de algebră liniară, dar nu le pot folosi în situaţii dintre cele mai simple.

Mariana (anul IV): *- (O bază este, n.n.) liniar independentă şi ... sistem de generatori. Dar nu pot să desenez baza, pot să dau exemplu...*
-Ia, dă un exemplu de bază, atunci.
-Nu ştiu, 0,1...
-Aha, 0,1 asta e o bază... musai are două elemente...
-Nu, trebuie sa fie egală cu ordinul elementului...

Credem că, pentru formarea intuiţiei secundare în algebra liniară, este necesar ca studenţii să opereze cu reprezentări multiple ale conceptelor, atât algebrice, cât şi geometrice sau numerice.

4. Concluzii

Studiul realizat arată că trebuie acordată o mai mare atenţie diversificării limbajului folosit în algebra liniară: este de preferat utilizarea atât a limbajului abstract (folosit mai ales la cursurile de Algebră, unde spaţiile vectoriale sunt privite ca exemplu de structură), cât şi a limbajului algebric (i.e. coordonate) sau geometric. Evidenţierea tuturor acestor aspecte conduce la formarea unor reprezentări multiple asupra conceptelor, ceea ce ajută studentul în înţelegere. Ca urmare a acestei concluzii, autorii intenţionează să îşi structureze adecvat cursurile pentru anul I, acordând o mai mare importanţă corelaţiei între reprezentările algebrice şi cele geometrice ale proprietăţilor vectoriale.

O altă concluzie a studiului este faptul că, în lipsa unei bune pregătiri de logică matematică şi de geometrie vectorială, aparatul algebric (i.e. studiul matricelor şi al sistemelor de ecuaţii) se dovedeşte insuficient pentru conceptualizare în algebra liniară. De aceea, atât curricula pentru liceu, cât şi cea pentru facultate, trebuie să fie adaptate acestor nevoi de învăţare.

O a treia concluzie a studiului se referă la metodele de învăţare din facultate. Şocul trecerii la un alt stil de interacţiune profesor-elev poate fi atenuat prin promovarea unei comunicări eficiente student-student sau student-profesor. Pentru aceasta, credem că sunt utile exerciţii de tipul prelucrării unor texte matematice, pentru extragerea ideilor fundamentale, precum şi diversificarea temelor adresate studenţilor. Concret, avem în vedere activităţi de alcătuire a unor hărţi conceptuale sau propunerea unor eseuri în care tema este de tipul: *Enunţaţi rezultatul cel mai important al capitolului* x *şi daţi cinci justificări pentru alegerea făcută.* Pentru a facilita comunicarea între studenţi, credem că este util să fie promovat lucrul în grup, atât în orele de seminar, cât şi pentru rezolvarea temelor.

Bibliografie

[1] De Bock, D. et al., *Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school student's errors,* Educational Studies in Mathematics, **50** (2002), 311- 334.

[2] Fischbein, E., *Intuition in science and mathematics*, Dodrecht, Holland, Reidel, 1987.

[3] Freudenthal, H., *Didactical phenomenology of mathematical structures,* Dordrecht, Reidel, 1983.

[4] Gardner, H., *Mintea disciplinată,* Ed. Sigma, Bucureşti, 2005.

[5] Hillel, J., *Models of description and the Problem of representation in Linear Algebra*, in J.L.Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra,* Kluver Academic Publishers, Dordrecht, 2000, 191-207.

[6] Marcus, S., *Şocul matematicii,* Ed. Albatros, Bucureşti, 1987.

[7] Van Dooren, W. et al., *Remediyng secondary school student's illusion of linearity: A developmental research,* Proceedings PME 2002, vol. **1**, Norwich, UK, 370-402.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 73-75

TEHNOLOGII MODERNE ÎN PROCESUL DE ÎNVĂŢĂMÂNT

Narcisa TEODORESCU
Universitatea Tehnică de Construcţii
Bucureşti

Dionis LICA
Universitatea de Stat din Moldova
Chişinău

MODERN TECHNOLOGIES IN EDUCATION

Abstract. The IT domain represents a very important part in the process of modernization of the Romanian educational system. The software tools for mathematical calculus have become more and more involved in many areas of teaching. Among these tools, *Maple* has an important role in solving mathematical problems like: complex algebrical transformations and algebrical simplifications; it computes finite and infinite sum and products, limits and integrals; it solves numerical and analytic, algebric and transcendent systems of equations and inequations; it provides the numerical and analytical solution of a system of ordinary differential equations; the problems of linear programming, of combinatorics, of graph theory, of Lie symmetries, and many others.

Modernizarea învăţământului în zilele noastre este o componentă de bază a politicii educaţionale pentru pregătirea noilor generaţii care au obligaţia să schimbe destinele ţării. Elementele fundamentale ale învăţământului universitar din România sunt bine conturate în mai multe acte guvernamentale, însă aplicarea lor în viaţă lasă mult de dorit.

Problemele ce ţin de starea actuală a sistemului de învăţământ nu pot fi rezolvate în afara procesului de informatizare a societăţii, în general, şi a sistemului educaţional, în special. Din aceste considerente Internet-ul şi tehnologiile bazate pe această invenţie remarcabilă a secolului trecut devin o parte componentă a întregului sistem de învăţământ. La rândul său, un mediu informaţional nu poate fi creat de structuri separate ci trebuie rezolvat prin consolidarea de forţe comune a partenerilor la procesul de modernizare a învăţământului, de unităţile de învăţământ preuniversitar şi universitar cu tradiţii, de structurile regionale de învăţământ, de edituri şi cu ajutorul mijloacelor de informare în masă.

În comunicare, pentru a minimaliza unele dintre deficienţele de pregătire a tinerei generaţii (elevi şi studenţi) la Matematici, optăm pentru aplicarea în procesul de învăţământ a sistemelor electronice de calcule matematice (SECM) bazate pe mijloace moderne – calculatoare electronice – care, cu adevărat au revoluţionat lumea. Întrucât unităţile de învăţământ dispun de săli amenajate cu mijloace tehnice moderne, acestea trebuie folosite eficient nu doar la Informatică ci şi în procesul de predare şi a altor discipline, cum sunt cele de matematică (algebră, geometrie, trigonometrie, ecuaţii diferenţiale etc.), chimie, fizică, biologie, geografie şi altele. Pe piaţă, la ora actuală, există mai multe astfel de produse programate (soft-uri), unele cu plată (Derive, Macsyma, CalculationCenter, Mathematica, Mathcad, Matlab, Maple etc.), altele – fără plată (Octave, Scilab, MuPAD, ExaMINATOR, Formula etc.), pe când unele dintre cele cu plată sunt accesibile pe Internet pentru folosinţă cu scopul de a se convinge toată lumea de eficacitatea lor în cele mai diverse domenii de activitate.

Sistemul Maple, după cum rezultă din multe publicaţii, este soft-ul cu cea mai mare reputaţie mondială dintre toate sistemele matematicii simbolice. Utilizatorii sistemului Maple sunt în stare să rezolve, practic, orice problemă apărută.

Exploatarea posibilităţilor reţelei mondiale de calculatoare face ca învăţământul, în general, şi cel românesc, în special, să devină mai deschis, mai efectiv, asigurând, în felul acesta, tineretului din orice colţ al ţării acces egal la sistemul de învăţământ şi, în special, la noile tehnologii de transmitere a cunoştinţelor.

Maple, un soft interactive al firmei Waterloo Maple Inc., care la ora actuală dispune de mai multe versiuni (Maple V, Maple 6–9 şi recenta versiune Maple 10) prezintă într-o concepţie unitară transformările şi calculele matematice atât simbolice, cât şi numerice. Versiunea Maple V rulează liber pe Internet, doritorii oricând pot apela la ea. Spre deosebire de limbajele de programare de nivel înalt (Fortran, Basic, C, Pascal etc.), Maple *rezolvă* multe probleme matematice doar prin apelare la comenzi, fără a fi nevoie să se compună programe aparte.

Maple execută transformări şi simplificări algebrice complexe; calculează sume şi produse finite şi infinite, limite şi integrale; rezolvă numeric şi analitic sisteme algebrice (şi transcendente) de ecuaţii şi inecuaţii; calculează determinanţii matricelor cu elemente simboluri matematice; determină toate rădăcinile unui polinom; determină numeric şi analitic soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare, precum şi a unor clase de ecuaţii cu derivate parţiale etc.

Maple cuprinde şi pachete separate de programe pentru rezolvarea diferitelor probleme din algebra liniară şi cea tensorială, din geometria euclidiană şi cea analitică, din teoria numerelor, din teoria probabilităţilor şi statistica matematică. Maple este de neînlocuit în aproximarea numerică, la rezolvarea problemelor de programare liniară (metoda simplex), precum şi la rezolvarea multor probleme ce ţin de combinatorică, de teoria grafurilor, de simetriile Lie, de logica matematică, de câmpurile Galois, de probleme ortogonale, de finanţe etc.

Sistemul Maple, pe lângă toate facilităţile indicate mai sus, ″posedă″ şi un limbaj interactiv propriu de programare, ceea ce îi permite utilizatorului să creeze de sine stătător comenzi şi, în felul acesta, să extindă posibilităţile acestui sistem pentru rezolvarea multor probleme speciale. Editorul de texte şi splendidele mijloace grafice permit sistemului Maple definitivarea profesională a lucrărilor îndeplinite.

Scrierea unui program în Maple este foarte simplă, fiind vorba doar de aplicarea unor comenzi formate din termeni uzuali din vorbirea curentă. Complexitatea programelor şi procedurilor depinde numai de utilizator, deoarece peste 80% din miile de comenzi Maple sunt de fapt programe Maple. Programele Maple pot fi modificate şi extinse în aşa fel încât să ofere utilizatorului soluţiile optime ale problemei în cauză.

Multe dintre temele abordate în comunicare au fost primite cu entuziasm de elevi şi studenţi. Astfel, prof. gr.1 Veronica Marin şi prof. gr.1 Ionel Marin, fiind încurajaţi de Adela Povarna (Inspectoratul şcolar din judeşul Argeş), au ţinut ore la matematici cu elevii Grupului Şcolar Industrial CCF şi Colegiului Tehnic *Dimitrie Cantemir* din Piteşti; conf. univ. dr. Ileana Armeanu (Universitatea de Ştiinţe Agronomice şi Medicină Veterinară din Bucureşti), a ţinut cursul şi lucrările practice la disciplina *Matematică şi Informatică*, acordând prioritate SMC Mahtcad; prof. univ. dr. Dionis Lica – cu studenţii facultăţii de Biotehnologii la disciplina *Matematică şi Biostatistică* din cadrul aceleaşi universităţii; conf. univ. dr. Gheorghe Căpăţână (şef catedră Tehnologii de Programare de la Universitatea de Stat din Chişinău) – cu studenţii facultăţii de Matematică şi Informatică; prof. univ. dr. Maria Micula (şef catedră de Ştiinţe exacte de la Universitatea de Ştiinţe Agricole şi Medicină Veterinară din Cluj-Napoca) – cu studenţii facultăţii de Agricultură, conf. univ. dr. Nicolae Objelean (şef catedră Economie Cibernetică de la Universitatea Agrară de Stat din Chişinău) – cu studenţii facultăţii de Economie şi Management, asist. univ. drd. Narcisa Teodorescu (Universitatea Tehnica de Construcţii din Bucureşti) – în cadrul referatelor de la doctorat.

Bibliografie

[1] Abell M., Braselton J.P., *Maple V by Example*, Academic Press, 1994.
[2] Abell M., Braselton J.P.,*Statistics with Mathematica,* Academic Press, 1999.
[3] Burkhare, W., *First Steps in Mathematica*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
[4] Capatana G., Dionis L., Marin V., Micula S., Teodorescu N., *Maple in Mathematics*, Bren, Bucharest, 2005.
[5] Diaconov V.P., *Maple 7* , Piter, Sanct-Petersburg, 2002.
[6] Diaconov V.P., *Mathcad 8/2000*, Piter, Sanct-Petersburg, 2000.
[7] Etter D.M., *Engineering Problem Solving with MATLAN*, PentinceHall, New York, 1993.
[8] Heal K. M., Hansen M.L., Rickard K.M., *Maple 6. Learning Guide*, Waterloo Maple Inc., 2000.
[9] Lica D.,Teodorescu N., *Maple: Electronic System of Mathematical Calculus*, MatrixRom, Bucharest, 2004.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 76-79

NUMERE PRIME - CATEVA TEOREME REMARCABILE SI APLICATII ALE ACESTORA

Mariana VEGA
Şcoala generală nr. 13, Piteşti

SOME THEOREMS ON AND APPLICATIONS OF PRIME NUMBERS

Abstract: A list of the main results on the prime numbers, which can be approached using elementary methods, is presented. Some of the examples can be used as generative problems for lower secondary and higher secundary schools.

Definiţie. *Numim număr prim orice număr natural* p, $p \geq 2$, *care are ca divizori doar* ± 1, $\pm p$.

Exemple. Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13 sunt numere prime, în plus 2 este singurul număr natural par prim.

Teorema lui Euclid [1]. *Mulţimea numerelor prime este infinită.*

Demonstraţie [1]. Presupunem că mulţimea P a numerelor prime este finită; există deci un număr natural n încât $P = \{ p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Fie $N = p_1 p_2 \ldots p_n+1$ şi, cum $N>1$, există p numar prim încât $p | N$. Deoarece $p \in P= \{ p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, avem $p | 1$, contradicţie cu faptul că p este prim.

Teorema lui Fermat [1]. *Dacă* p *este un număr natural prim şi* a *este număr întreg încât* (a, p) = 1, *atunci* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Demonstraţie (conform [2]). Fie $Z_p - \{\hat{0}\} = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots \widehat{p-1}\}$; cum p e prim, $\mathbf{Z}_p$ nu are divizori ai lui 0, deci elementele: $\hat{a}\cdot\hat{1}, \hat{a}\cdot\hat{2}, \hat{a}\cdot\hat{3}, \ldots, \hat{a}\cdot\widehat{p-1}$ sunt distincte.

Avem relatiile

$$\hat{a}\cdot\hat{1} = \hat{i}_1, \ldots. \hat{a}\cdot\widehat{p-1} = \hat{i}_{p-1}, \ (\hat{a}\cdot\hat{1})\cdot(\hat{a}\cdot\hat{2}), \ldots\ldots(\hat{a}\cdot\widehat{p-1}) = \hat{i}_1\cdot\hat{i}_2\cdot \ldots. \cdot\hat{i}_{p-1},$$

adica

$$(\hat{a}^{p-1})\cdot (\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots\ldots \widehat{p-1}) = \hat{i}_1\cdot \hat{i}_2\cdot \ldots.\hat{i}_{p-1},$$

deci

$$\hat{a}^{p-1} = \hat{1} \text{ sau } \hat{a}^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Aplicatii ale teoremei lui Fermat

1. *Să se arate că, dacă a este un numar întreg şi este prim cu 35, atunci*

$$E = (a^4 - 1)(a^4 + 15a^2 + 1) \vdots 35.$$

Soluţie.
(a, 35) = 1, deci *(a, 5) =1*, *(a, 7) = 1.*
Dacă

$$(a, 5) = 1 \Rightarrow a^4 \equiv 1 \ (mod 5) \Leftrightarrow a^4 - 1 \vdots 5 \Leftrightarrow E \vdots 5 \qquad (1)$$

E se mai scrie

$$(a^4-1)[(a^4 + a^2 + 1) + 14a^2] = (a^4-1)(a^4 + a^2 + 1) + 14a^2(a^4-1) =$$
$$= (a^2+1)(a^2-1)(a^4+a^2+1) + 14a^2(a^4-1) = [(a^2+1)(a^6-1)+14a^2(a^4-1)] \vdots 7 \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă $E \vdots 35$.

2. *Găsiţi numărul prim* p *astfel încât* $E_{(p)} = 5^{p^2} + 1$ *să fie divizibil cu* p^2.

Soluţie. Scriem

$$E_{(p)} = 5(5^{p^2-1} - 1) + 6 = 5[(5^{p-1})^{p+1} - 1] + 6$$

Cum $(5^{p-1})^{p+1} - 1 \vdots (5^{p-1}) - 1$, iar $5^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (mod\ p)$ şi $E_{(p)}$ trebuie să fie divizibil cu p, rezultă $6 \equiv 0$ *(mod p),* adică p nu poate fi decât 2 sau 3.
Dacă p = 2, $5^6 + 1 = 626 \equiv 0$ *(mod 4).*
Dacă p = 3, $5^9 + 1 \equiv 0$ *(mod 9).*
Deci p = 3.

Definiţie. [3] *Dat fiind un număr natural* m*, notam cu* $\varphi_{(m)}$ *numărul de numere naturale prime cu* m *mai mici decât acesta;* $\varphi_{(m)}$ *se numeşte indicatorul lui Euler.*

Observaţii.

1. Calculul indicatorului lui Euler, conform [1], este dat de relaţia

$$\varphi(m) = m\left(1 - \tfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \tfrac{1}{p_2}\right)......\left(1 - \tfrac{1}{p_i}\right),$$

unde $p_1, p_2, ...p_i$, reprezintă factorii primi din descompunerea lui m conform teoremei fundamentale a aritmeticii: $m = p_1^{\alpha_1}.......p_i^{\alpha_i}$.

2. Calculul aceleiaşi funcţii a lui Euler $\varphi_{(m)}$ poate fi dat şi de expresia :

$$\varphi(m) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right)\left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}\right)......\left(p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1}\right),$$

unde $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}.......p_n^{\alpha_n}$ (descompunerea în factori primi a lui m).

Teorema lui Euler. [2] *Dacă* m *este un număr natural neprim şi* a *este un număr întreg prim cu* m*, atunci*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (\text{mod } m).$$

Demonstraţie (conform [2])
Ştim că, dacă *(a,m) = 1, (b,m) = 1*, atunci $\hat{a}\cdot\hat{b}\neq\hat{0}$ (în $\boldsymbol{Z}_m$).
Fie şirul $i_1, i_2, i_3, ...i_{\varphi(m)}$ de numere naturale prime cu *m*, mai mici ca *m*; acestea sunt singurele elemente din $\boldsymbol{Z}_m - \{\hat{0}\}$ ce nu sunt divizori ai lui 0 şi orice element din $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3, ...\hat{i}_{\varphi(m)}$ admite un invers.

Dacă $a \in \{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3, ...\hat{i}_{\varphi(m)}\}$, nu putem avea $\hat{a}\hat{i}_k = \hat{a}\hat{i}_e$ fără să avem $\hat{i}_k = \hat{i}_e$, neavând divizori ai lui zero.
Avem

$$\hat{a}\cdot\hat{i}_1 = \hat{i}_1$$
$$\hat{a}\cdot\hat{i}_2 = \hat{i}_2,$$

cu $(i_k, m) = 1,\ \forall\ k = 1,2,......., \varphi_{(m)}$; $\hat{a}\cdot\hat{i}_{\varphi(m)} = \hat{i}_{\varphi(m)}$, deci

$$(i_1, i_2, i_3, ...i_{\varphi(m)}, m) = 1.$$

Înmulţind, avem $\left(a^{\varphi(m)} - \hat{1}\right)\hat{i}_1\cdot\hat{i}_2\cdot\hat{i}_3\cdot......\hat{i}_{\varphi(m)} = \hat{0}$, deci $\left(a^{\varphi(m)}\right) = \hat{1}$, adică

$$\left(a^{\varphi(m)} - 1\right) \equiv 0(\bmod m).$$

Observaţie.

Pentru un număr prim, $\varphi_{(m)}$ = card {1,2,…..,*m*-1) = *m* -1, deci $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$, astfel că descoperim Teorema lui Fermat ca o consecinţă a celei a lui Euler.

Teorema lui Wilson [2]. *Dacă* m *este un număr natural prim, atunci* (m-1)!+1 $\vdots$ m.

Demonstraţie. (conform [2]) Dacă *m* e număr natural prim, Z_m-$\{\hat{0}\}$=$\left\{\hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{m-1}\right\}$ conţine *m* -1 clase, fiecare clasă având-şi inversul în Z_m-$\{\hat{0}\}$.

Cum *m* -1 e număr par, produsul $\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot..........\cdot\widehat{m-2}$ e format din clase si inverse ale acestora, deci $(\widehat{m-2})! = \hat{1}$

De aici $(\widehat{m-1})! = \widehat{m-1} = -\hat{1}$ sau (m-1)! + 1 ≡ 0 (mod *m*)

Exemple.
a) Pentru *m*=3, (3-1)! + 1 = 3 ($\vdots$3)
b) Pentru *m*= 5, (5-1)! + 1= 25 ($\vdots$5)

Aplicaţii.

1. *Să se arate că dacă* p *e prim şi* $a^p \equiv b^p$ (mod p), *atunci* $a^p \equiv b^p$ (mod p^2).

Soluţie.
Fie *p* prim, *p* ≥2. Avem posibilităţile:

I. $a \vdots p, b \vdots p \Rightarrow a^p \vdots p^2,\ b^p \vdots p^2 \Rightarrow a^p - b^p \vdots p^2$

II Dacă nici a, nici b nu se divid cu p, atunci

$$a^p \equiv a \pmod p),\ b^p \equiv b \pmod p),$$

deci

$$(a-b) \vdots p.$$

Pe de altă parte:

$$a^p - b^p = (a-b) \sum_{k=o}^{p-1} a^{p-1-k} b^k$$

$$pb^{p-1} \equiv 0 \ (mod\ p) \Rightarrow b^{p-1}+b^{p-2}b+b^{p-3}p^2+\ldots\ldots\ldots+b^{p-1} \equiv 0 \ (mod\ p)$$

$$a \equiv b \ (mod\ p) \Rightarrow a^{p-1}+a^{p-2}b+a^{p-3}p^2+\ldots\ldots\ldots+b^{p-1} \equiv 0 \ (mod\ p)$$

Deducem că

$$\sum_{k=o}^{p-1} a^{p-1-k} b^k \vdots p \Rightarrow (a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1} b^k \vdots p^2 \Rightarrow a^p - b^p \equiv 0 (\bmod p^2) \Rightarrow a^p \equiv b^p (\bmod p^2)$$

2. *Arătaţi că* N= $5^{10} - 5^8 - 5^2 + 1 \vdots 576$.

<u>*Soluţie.*</u> Avem succesiv

$576 = 2^6 \cdot 3^2$, $5^3 \equiv -3 \pmod{2^6}$, $5^{10} \equiv -3^3 \cdot 5 \pmod{2^6}$, $5^8 \equiv -3^2 \cdot 5^2 \pmod{2^6}$.

Putem deci scrie:

$$N \equiv -3^3 \cdot 5 + 3^2 \cdot 5^2 - 5^2 + 1 = 3^2 \cdot 5(5-3) - 24 = 0 \pmod{2^6}$$

Cum $\varphi(3^2) = 6$ si $(5,3^2) = 1$, obţinem:

$$5^6 \equiv 1 \pmod{3^2}$$
$$5^{10} \equiv 5^4 \pmod{3^2}$$
$$5^8 \equiv 5^2 \pmod{3^2}$$

deci

$$N = 4+2+2+1 = 9 \equiv 0 \pmod{3^2},$$

adica $N \vdots 2^6 \cdot 9 = 576$.

Notiunea de număr natural prim este introdusă în gimnaziu, în clasa a V-a; tot în gimnaziu se învaţă şi descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime (teorema fundamentală a aritmeticii)

Deja la acest nivel se pot rezolva multe exerciţii interesante legate de numerele prime; din lucrarea de mai sus, calculul indicatorului lui Euler sau folosirea teoremei lui Fermat pot fi făcute chiar la nivel gimnazial, celelalte rezultate necesitând noţiuni legate de clasele de resturi, iar acestea se introduc mai târziu.

Toate cele trei teoreme legate de numere prime au enunţuri uşor de reţinut, aplicaţii multiple şi deosebit de interesante.

Bibliografie

[1] Năstăsescu, C., Niţă, C., Vraciu, C., *Aritmetică şi algebră,* Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1994.

[2] Rizescu, G., Rizescu, E., *Teme pentru cercurile de matematică din liceu,* Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1980.

[3] Rogai, E., *Tabele şi formule matematice,* Ed. Tehnică, 1980.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 80-85

ÎNVĂŢAREA PRIN PROIECT

Consuela Luiza VOICA
Şcoala cu clasele I-VIII nr.12, Bucureşti

USING PROJECTS TO LEARN MATHEMATICS

Abstract. The project conceived as a didactical method becomes more and more used in school. In Romania, this method is not frequently applied, due to the caution of the teachers. In this paper, we present some examples of projects that have been developped by students during the common math classes.

1. Introducere

Evoluţia societăţii contemporane determină schimbări majore ale rolului profesorului şi al elevului în procesul instrucţional. Astfel, profesorul devine, în primul rând, *partener în învăţare*, iar elevul capătă un rol mult mai activ, deoarece el *argumentează, pune întrebări şi cooperează în rezolvarea sarcinilor de lucru* [4].

În aceste condiţii, este nevoie de o diversificare a metodelor de învăţare: în condiţiile în care elevii au acces rapid la informaţii prin intermediul internetului, rolul profesorului este, în principal, acela de a utiliza metode de învăţare cât mai diferite şi atractive.

Ultimul studiu TIMSS arată că, în România, 25% dintre elevii claselor a VIII-a nu au încredere în posibilităţile lor de a învăţa matematică [3]. O soluţie pentru această stare de fapt ar putea fi promovarea unor legături mai clare între ceea ce învaţă elevul şi viaţa reală. Pentru aceasta, nu este nevoie doar de rezolvarea la clasă a unor probleme practice, ci şi de utilizarea unor metode noi, care să îi arate elevului utilitatea a ceea ce învaţă.

Învăţarea prin proiect este una dintre aceste metode.

2. Ce înseamnă învăţare prin proiect?

Specialiştii în domeniu definesc în diverse moduri învăţarea prin proiect. Prezentăm în continuare câteva dintre aceste definiţii, preluate din [2].

- *Învăţarea bazată pe proiect este o abordare instrucţională comprehensivă care angajază elevii într-o investigaţie bazată pe cooperare.* (Bransford, Stein, 1993.)
- Învăţarea prin proiect *este o învăţare în profunzime în care copii sunt stăpânii propriei munci, unde li se oferă libertatea de alegere dintr-o serie de posibilităţi stabilite de cadrul didactic împreună cu elevii*. (Sylvia Chard, 2002.)
- *Învăţarea bazată pe proiect presupune dezvoltarea unor experienţe de învăţare care implică proiecte complexe, din viaţa reală a elevilor, solicitând elevii să apeleze la surse diverse de informaţii, să aloce resurse precum timpul şi materialele*. (*Alternative Modes to Delivery: Project based learning -* Univ. of Western Australia, 2000.)

3. De ce este util să organizăm învăţare prin proiecte?

Există, de regulă, o reticenţă în aplicarea învăţării prin proiect la orele de matematică; mulţi dintre colegii cu care am discutat preferă să desfăşoare activităţi bazate pe rezolvarea de probleme, decât să organizeze alte tipuri de activităţi de învăţare. Ei susţin că, prin organizarea unor astfel de activităţi, se pierde prea mult timp, iar elevii nu învaţă ce şi cât ar trebui.

Opiniile elevilor, exprimate în urma unor activităţi diverse (de tip lucru în grup, referat, proiect), precum şi evaluările comparative la clase care au desfăşurat/ nu au desfăşurat astfel de activităţi, arată însă că învăţarea este mult mai eficientă atunci când activităţile propuse sunt diversificate. În plus, după depăşirea *şocului* aplicării acestor metode la clasă, profesorii constată că motivaţia elevilor pentru învăţare se îmbunătăţeşte considerabil.

4. Cum organizăm activităţi bazate pe proiecte?

Atunci când profesorul de matematică doreşte aplicarea la clasă a metodei proiectelor, el îşi pune următoarele întrebări: *Cum trebuie să procedez pentru a organiza la clasă activităţi bazate pe proiecte? Ce teme ar trebui să aleg pentru proiecte? Cum aş putea evalua activitatea elevilor?*

Prezentăm în continuare modul în care am procedat în organizarea unor activităţi de învăţare prin proiecte.

În ultimii ani, am organizat activităţi bazate pe proiecte cel puţin o dată pe semestru, la clasele a VII-a – a VIII-a de la Şcoala Nr.12 din Bucureşti. Aceste activităţi presupun parcurgerea următoarelor etape:

1. Alegerea temei

Pentru proiectele desfăşurate, temele propuse au fost alese de profesor, astfel încât să aibă relevanţă în cotidian. Aceasta este o modalitate simplificată de desfăşurare a activităţii prin proiect. Unii autori recomandă ca profesorul să organizeze o discuţie, în urma căreia elevii ajung singuri la formularea temei proiectului; o astfel de abordare cere însă, din partea profesorului, o anumită experinţă, care se poate căpăta doar în timp, după desfăşurarea mai multor activităţi bazate pe proiecte.

Alegerea unor teme deopotrivă interesante şi consistente nu este uşoară. Pentru anul şcolar trecut (2004-2005) am ales următoarele teme:

Telefonia: care companie este mai avantajoasă?
O călătorie cu taxiul
Cum alegem vasele de bucătărie?
Pe ce dăm banii?

2. Organizarea grupurilor de lucru

Grupurile au fost formate pe baza opţiunilor elevilor (*grupare solicitată de elevi*). Grupurile au avut uneori o temă comună, alteori teme diferite. În acest ultim caz, alegerea temei a fost făcută de către membrii grupului.

După fixarea temei, elevii au discutat între ei şi cu profesoara privitor la sursele de informaţii, calendarul de lucru, sarcinile ce revin fiecărui membru al grupului şi modul de realizare şi de prezentare a proiectului. În toată această activitate, profesorul are doar rolul de consultant; el decide termenul de realizare şi nu intervine în activitatea unui grup de lucru, decât dacă membrii grupului solicită explicit acest lucru.

La fiecare dintre proiectele desfăşurate, timpul de realizare propus a fost de 3 săptămâni.

3. Desfăşurarea efectivă a proiectului

Periodic, la termenele convenite de la început, am cerut grupurilor de lucru un raport asupra activităţii desfăşurate şi a rezultatelor obţinute până atunci. La proiectele desfăşurate, fiecare grup de lucru a raportat o dată pe săptămână.

De regulă, în grupurile formate pe baza opţiunilor elevilor nu apar conflicte generate de neîndeplinirea sarcinilor asumate. Totuşi, atunci când acestea au apărut, am explicat importanţa fiecărui membru al echipei în realizarea proiectului. În acest mod, stările conflictuale au dispărut, iar grupurile de lucru au putut prezenta proiectul la data stabilită anterior.

4. Prezentarea proiectului

Un proiect *este ceva, nu este despre ceva* [5]. De aceea, în urma desfăşurării proiectului trebuie realizat un produs finit. Aceste produse pot fi: pliante, broşuri, postere, pagini de revistă, scenete, etc. Elevii trebuie să aibă deplina libertate în alegerea produsului realizat şi a modului de prezentare a acestuia.

Pentru proiectele desfăşurate în anul şcolar trecut, elevii au realizat: postere, fişe de probleme, pliante, joc de rol.

5. Evaluarea proiectului

Există mai multe modalităţi de evaluare a unui proiect.

Pe de o parte, profesorul evaluează: cantitatea şi calitatea informaţiilor prezentate, corectitudinea acestuia, modul de organizare a informaţiilor, modul de prezentare a produsului obţinut, modul în care grupul de lucru a colaborat, originalitatea prezentării. Pentru această evaluare, este utilă întocmirea unei fişe de observare, de tipul următor:

	În mică măsură	*În măsură moderată*	*În mare măsură*
Informaţiile prezentate sunt relevante pentru tema aleasă			

Autoevaluarea membrilor grupului de lucru este, de asemenea, importantă, deoarece profesorul poate obţine informaţii utile asupra modului în care elevii au colaborat şi asupra rolurilor asumate. Pentru această autoevaluare, profesorul poate cere membrilor grupului să dea note colegilor şi să justifice motivul acordării lor.

O altă evaluare poate fi făcută de către colegii de clasă, neparticipanţi la proiectul respectiv, din perspectiva a ceea ce au înţeles din tema prezentată. Această evaluare se poate realiza prin completarea unor chestionare sau/şi prin rezolvarea unor sarcini de lucru, pe baza informaţiilor obţinute din proiect. La unul dintre proiectele realizate, membrii echipei au făcut ei înşişi evaluarea colegilor de clasă, propunându-le acestora rezolvarea unor probleme, prin folosirea informaţiilor conţinute în pliantul distribuit.

Aprecierea prin notă a elevilor, în urma desfăşurării unor proiecte, a ţinut cont de toate aceste aspecte.

5. Un exemplu – învăţare bazată pe proiect

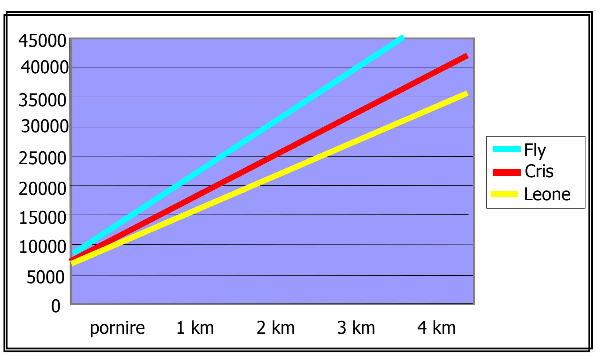
Proiectul prezentat mai jos a fost realizat de către elevele Alice Alexandru, Diana Bârloiu şi Andra Petrea, din clasa a VIII-a A de la Şcoala Nr.12 din Bucureşti.

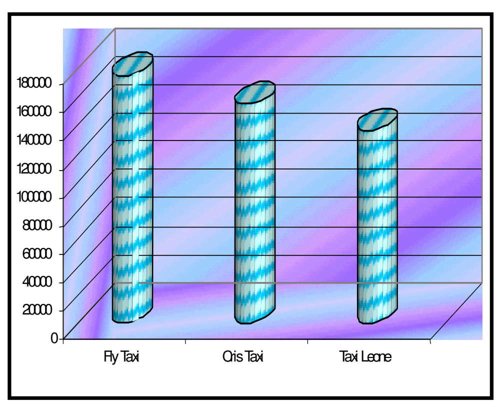
Tema aleasă pentru proiect a fost: *O călătorie cu taxiul: care companie este mai avantajoasă?* Acest proiect a fost propus în ideea modelării unor aspecte din viaţa reală prin intermediul funcţiilor.

Culegerea datelor a fost făcută prin telefon, internet sau prin informaţii directe, de la şoferii de taxi. Ele au ales, pentru exemplificare, trei companii ale căror preţuri sunt diferite. Organizarea datelor culese a fost făcută prin tabele şi reprezentări grafice. Reprezentările grafice au fost realizate cu ajutorul programului Microsoft Excel. Partea cea mai dificilă a proiectului a fost determinarea modelului matematic prin care poate fi exprimat costul unei curse. Dificultatea a constat în faptul că modelul corect impune considerarea unei funcţii de două variabile, şi anume lungimea traseului parcurs şi timpul de aşteptare. În acest moment, profesoara a intervenit, sugerând considerarea a două situaţii şi anume: călătorii cu, sau fără staţionare. (De fiecare dată, s-au neglijat timpii de aşteptare la semafoare.) Astfel, grupul de lucru a ajuns la considerarea a două modele matematice ale problemei. Deoarece elevii de clasa a VIII-a nu studiază funcţii de două variabile, profesoara a recomandat grupului de lucru să nu mai ia în considerare timpul de aşteptare ca variabilă; elevii au considerat doar situaţii în care timpul de aşteptare este fix, au calculat separat costul staţionării şi l-au adăugat costului total.

Pentru prezentarea proiectului, cele trei eleve au realizat un poster, pe care au pus diferite reprezentări grafice ale variaţiilor tarifelor practicate de trei companii de taximetre.

Compania	Pornire (ROL)	Tarif Km (ROL)	Stationare (ROL)
Fly Taxi	9990	9990	90000
Cris Taxi	7500	8490	90000
Taxi Leone	6990	6990	90000





După prezentarea modelului matematic şi argumentarea acestuia, membrele grupului de lucru au cerut colegilor să rezolve câteva probleme, pe baza datelor prezentate în poster. Această activitate a vizat utilizarea informaţiilor prezentate grafic pentru aplicaţii.

Problemele propuse spre rezolvare au fost cele prezentate mai jos.

1. *Alina, Mirela şi Marina au de parcurs 20 km pentru a ajunge la magazinul de unde urmează să-şi facă cumpărăturile. Fiecare a ales o altă companie de taximetrie. Cine a ales cea mai avantajoasă companie?*

Rezolvare.
Alina : Fly Taxi = $t(x)$
Mirela : Cris Taxi = $g(x)$
Marina : Leone = $p(x)$
$f(x) = ax + b$, a=tarif/ km, x=număr de km, b=preţul pornirii
$t(20)$=20·9.990 + 9.990= 199.800 + 9.990=209.790 ROL
$g(20)$=20·8.490 + 7.500=169.800 + 7.500=177.300 ROL
$p(20)$=20·6.990 + 6.990=139.800 + 6.990=146.790 ROL
Concluzia : Compania Taxi Leone este cea mai avantajoasă, deci Marina a făcut alegerea cea mai bună.

2. *Dan, Mihai si Florin vor să meargă la aeroport ca să-şi aştepte părinţii. Ei au hotarât să afle care companie de taximetrie este mai avantajoasă. Fiecare a ales o companie şi au parcurs următorul traseu: pornire, parcurg 6 km, staţionare 30 min şi retur. Cine a cheltuit mai mulţi bani?*

Rezolvare.
Dan : Fly Taxi = $t(x)$
Mihai : Cris Taxi = $g(x)$
Florin : Leone = $p(x)$

$f(x) = ax + b$, a =tarif/ km, x =număr de km, b =preţul pornirii + preţul staţionării.
$t(6)$=9.990·12 + 9.990 + 1/2·90.000=119.880 + 9.990 + 45.000=174.870 ROL
$g(6)$=8.490·12 + 7.500 + 1/2·90.000=101.880 + 7.500 + 45.000=154.380 ROL
$p(6)$=6.990·12 + 6.990 + 1/2·90.000=83.880 + 6.990 + 45.000=135.870 ROL
Dan a cheltuit cel mai mult, Fly Taxi fiind cea mai scumpă companie, iar Taxi Leone cea mai avanatjoasă.

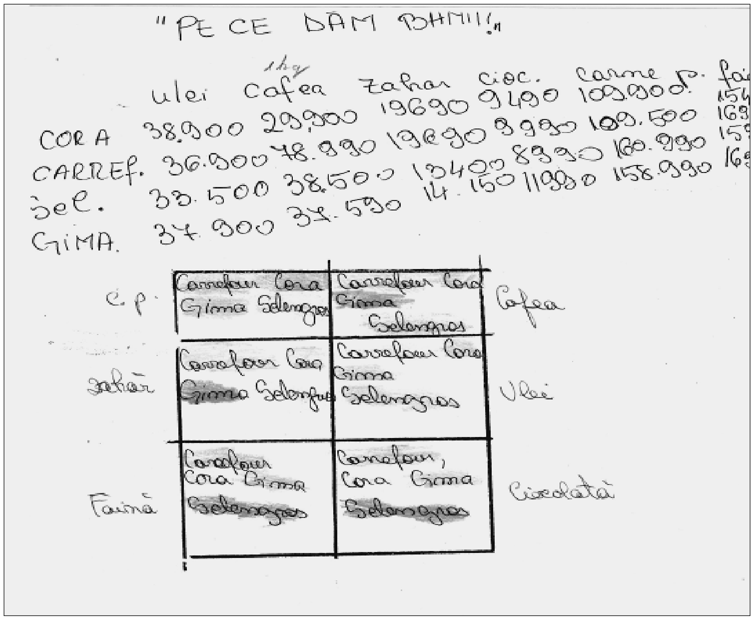
6. Un exemplu - evaluarea proiectelor

Elevii sunt foarte inventivi în ceea ce priveşte modalităţile de evaluare ale colegilor de clasă, în urma prezentării unui proiect.

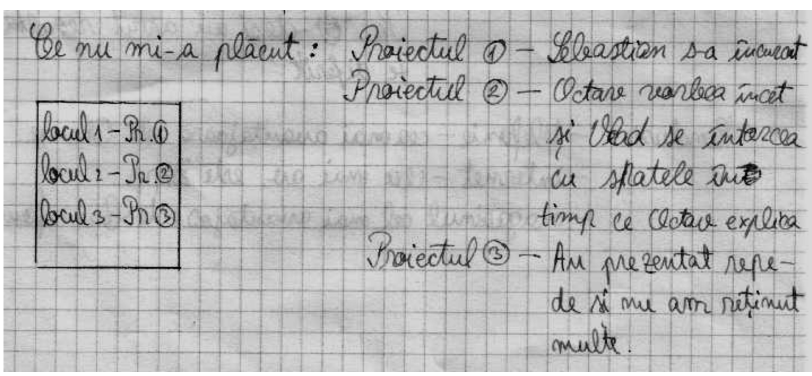
De exemplu, la finalul proiectul *Pe ce dăm banii?*, grupul de lucru format din elevele Andreea Băluţă, Mădălina Cioalcă şi Alice Gheorghiu, din clasa a VII-a A, au dat colegilor de clasă un *pliant*, conţinând preţurile practicate de anumite magazine la unele produse alimentare.

Ele au cerut colegilor ca, pe baza acestui material, să realizeze o diagramă cu bare pentru a reprezenta preţurile la anumite produse. Ulterior, cele trei eleve au evaluat lucrările primite.

În urma prezentării tuturor celor şase proiecte realizate de elevii clasei, pentru tema *Organizarea datelor*, profesoara a cerut clasei să ierarhizeze proiectele prezentate, prin completarea unui tabel în care au dat note grupului pentru prezentarea generală şi claritatea informaţiilor, precum şi fiecărui membru al grupurilor, pentru prestaţia în prezentare.



Elevii au argumentat toate aceste note, precizând ceea ce le-a plăcut sau nu le-a plăcut la fiecare prezentare în parte.



Bibliografie

[1]*** *Curriculum Naţional. Programe şcolare pentru clasele a V-a – a VIII-a*. M.E.C, C.N.C, 1999.

[2] Ionescu, M., *Managementul clasei. Un pas mai departe… Învăţarea bazată pe proiect,* Ed. Humanitas Educaţional, Bucureşti, 2003.

[3] Noveanu, G., *Învăţarea matematicii şi ştiinţelor. Studiu comparativ (III),* Editat de ISE Bucureşti, B&B Company, Bucureşti, 2005.

[4] Singer, M. (coord.), *Ghid metodologic pentru aplicarea programelor de matematică primar-gimnaziu,* Ed. Aramis Print, Bucureşti, 2001.

[5] Singer, M., Voica, C., *Învăţarea matematicii. Elemente de didactică aplicată pentru clasa a VIII-a. Ghidul profesorului*, Ed. Sigma, Bucureşti, 2002.

[6] Stoica, Adrian. (coordonator), *Evaluarea curentă şi examenele. Ghid pentru profesori*, Ed. ProGnosis, Bucureşti, 2001.

[7] Ulrich, C., *Managementul clasei – Învăţare prin cooperare*, Ed. Corint, Bucureşti, 2000.

ROMAI Educational Journal
1 (2006), 86-92

UTILIZAREA HĂRŢILOR CONCEPTUALE ÎN PREDAREA ALGEBREI

Cristian VOICA
Universitatea din Bucureşti

USING CONCEPT MAPS IN TEACHING ALGEBRA

Abstract. A *concept map* is a graph that organises complex information. Concept maps can be used both as a learning method and in assessment. In the paper, we present some examples of concept maps, made by students – prospective teachers in mathematics.

1. Introducere

Este încă larg răspândită ideea că învăţarea este determinată doar de modul în care profesorul îi furnizează elevului/studentului informaţia. Teste administrate unor profesori de matematică, participanţi la cursurile de perfecţionare organizate în 2005 la Facultatea de Matematică şi Informatică din Bucureşti, precum şi chestionare completate de către studenţi ai aceleiaşi Facultăţi, au conturat percepţia *profesor bun = profesor care predă bine*.

Studii recente de psihologie a învăţării au ajuns însă la concluzia că elevul/studentul învaţă mai ales prin angajarea sa în activităţi care îl ajută să prelucreze şi să interconecteze informaţiile primite. De aceea, profesorul nu trebuie să se mai limiteze doar la furnizarea de informaţii şi impunerea unor puncte de vedere, ci el capătă mai ales rolul de *organizator şi partener în învăţare* [2].

În învăţământul preuniversitar de matematică, strategia utilizată cu precădere este rezolvarea de probleme. Practica oferă însă un rău exemplu în acest sens: pe de o parte, sunt propuse prea puţine probleme conectate cu viaţa reală, iar pe de altă parte, se accentuează prea mult latura algoritmică, în goana după rezultate imediate la examenele şi concursurile şcolare. Se ajunge astfel la strategii de tipul *algoritmi rigid aplicaţi* [1].

O situaţie de aceeaşi factură se întâlneşte şi în învăţământul universitar. De cele mai multe ori, studenţii se confruntă cu o avalanşă de informaţii, pe care, de regulă, nu le pot interconecta şi cărora nu le înţeleg utilitatea. Strategiile utilizate în învăţământul universitar românesc nu par să ţină cont de posibilităţile reale de înţelegere ale studentului. Se ajunge astfel ca, la terminarea facultăţii, concepte fundamentale (cum ar fi, de exemplu, structurile algebrice) să nu fie cunoscute nici măcar le nivelul definiţiilor acestora.

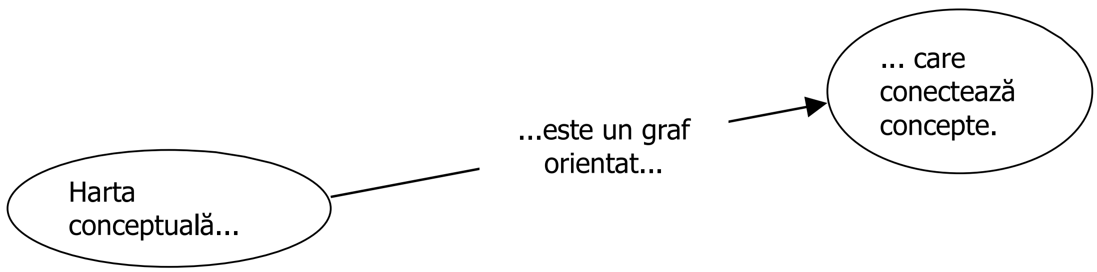
De aceea, devine necesar ca profesorul să aplice la clasă/la curs/la seminar şi alte strategii, menite să promoveze o învăţare eficientă şi de durată. Utilizarea hărţilor conceptuale este una dintre aceste strategii.

În lucrarea de faţă, prezentăm un studiu făcut la Facultatea de Matematică şi Informatică din Bucureşti, privitor la modul alcătuire şi de utilizare a unor hărţi conceptuale de către studenţi.

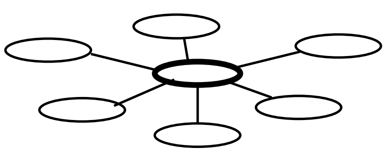
2. Câteva precizări

2.1. Ce este o hartă conceptuală?

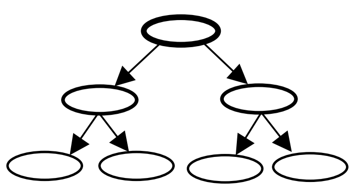
Harta conceptuală este un graf, în care nodurile reprezintă concepte, iar arcele (eventual orientate) sunt relaţii de cauzalitate/ determinare între conceptele conectate.



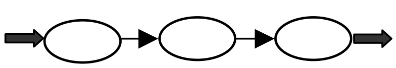
2.2. Tipuri de hărţi conceptuale



Harta de tip păianjen: se caracterizează prin identificarea unor concepte centrale şi organizarea unor legături de subordonare între acestea şi alte concepte.



Harta de tip ierarhic: se caracterizează prin plasarea spațială a conceptele în ordinea importanţei acestora. De obicei, o hartă de tip ierarhic plasează în partea superioară conceptele mai importante.



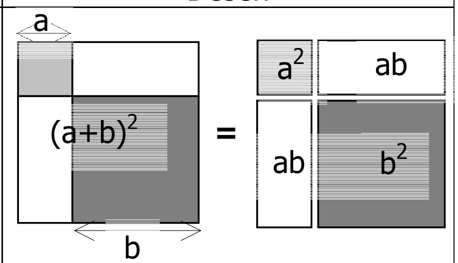
Harta de tip liniar: se caracterizează prin considerarea tuturor conceptelor ca având o aceeaşi importanţă, fiind evidenţiate doar relaţiile de determinare între acestea.

Pe o aceeaşi hartă a conceptelor, pot să apară şi combinaţii ale acestor tipuri de hărţi. În alcătuirea hărţilor, sunt importante identificarea conceptelor principale ale secţiunii de studiu şi a legăturilor dintre acestea.

2.3. De ce sunt utile hărţile conceptuale?

Informaţiile prezentate într-o formă grafică sunt înţelese şi interpretate mai uşor; de aceea, informaţiile transmise printr-un desen sau o schemă sunt de preferat celor transmise prin intermediul unui text. De exemplu, să comparăm modalităţile de prezentare a formulei pătratului de binom, prezentate în tabelul de mai jos.

Hărţile conceptuale permit transpunerea informaţiilor complexe într-o formă grafică, prin care sunt evidenţiate relaţii de dependenţă şi de cauzalitate. De aceea, hărţile conceptuale se dovedesc utile pentru organizarea şi înţelegerea conceptelor, la orice nivel de clasă/ an de studiu. În plus, hărţile conceptuale permit elevilor/studenţilor să identifice conceptele-cheie şi sunt un bun pretext pentru dezvoltarea comunicării între elevi sau studenţi (cf. [4]).

Text	*Schemă*	*Desen*
Pentru a calcula pătratul unui binom, adunăm pătratul primului termen al binomului cu pătratul celui de-al doilea termen al binomului şi cu dublul produsului dintre primul termen şi al doilea termen.	$(a+b)^2=$ $=a^2+2ab+b^2$	

3. Studiul realizat

3.1. Întrebări de start ale studiului

Studiul a fost proiectat pentru a răspunde următoarelor întrebări:

1. poate fi adaptată strategia hărţilor conceptuale la cursurile/seminariile de algebră din facultate, în contextul învăţământului românesc?
2. cum procedează studenţii pentru întocmirea unor hărţi conceptuale?
3. sunt eficiente hărţile conceptuale pentru ameliorarea rezultatelor şcolare?

3.2. Metodologie

Am testat modul de întocmire a unor hărţi conceptuale şi eficienţa acestora în învăţare în două situaţii diferite.

Prima situaţie a vizat modul de organizare de către studenţi a unor informaţii în majoritate noi pentru ei: înţelegerea unor programe de matematică (pentru clasa a XI-a, respectiv a VII-a), de către studenţi – viitori profesori, în cadrul cursurilor opţionale de *Proiectarea activităţilor didactice / Didactică aplicată*, propuse pentru anii terminali din facultate, în 2002-2003 şi, respectiv, în 2004-2005.

A doua situaţie s-a referit la modul de organizare a unei informaţii complexe – dar suficient de bine cunoscută – şi la influenţa acestui tip de organizare asupra rezultatelor la examene. Activitatea a fost desfăşurată la seminariile recapitulative de Algebră, cu studenţi din anul al II-lea, în anul şcolar 2004-2005, iar evaluarea s-a realizat în cadrul examenului de sfârşit de semestru.

În toate cazurile, studenţii au lucrat, pentru alcătuirea hărţilor, în grupuri de câte 3-5 persoane. În timpul desfăşurării activităţilor, ei au putut consulta diverse materiale (i.e. programe şcolare, notiţe de curs, notiţe de seminar, cursuri tipărite).

În total, au participat la acest experiment aproximativ 80 de studenţi.

3.3. Desfăşurarea studiului

În ambele situaţii descrise anterior, studenţii au parcurs următoarele etape:

1. selectarea conceptelor considerate de importanţă majoră, din materialul studiat;
2. alcătuirea unei liste cu conceptele selectate şi ierarhizarea acestora, în ordinea importanţei atribuite de studenţi;

3. poziţionarea conceptelor într-o structură plană, care să permită precizarea conexiunilor/dependenţelor de tip cauză-efect;
4. realizarea hărţii conceptuale propriu-zise, prin trasarea arcelor grafului;
5. compararea propriei hărţi cu opţiunile celorlalţi colegi;
6. susţinerea punctelor de vedere.

Pentru hărţile conceptuale de organizare a programelor şcolare, am solicitat studenţilor doar alcătuirea unui graf. La seminariile recapitulative, studenţii au completat, pe arcele de legătură, rezultatul (teorema) ce a permis trasarea arcului respectiv.

Toate experimentele au fost finalizate prin metoda *turul galeriei* (i.e. afişarea posterelor realizate şi observarea lor de către toţi participanţii). În prima situaţie, am provocat studenţii la discuţii explicative asupra propriilor opţiuni, în timp ce, pentru a doua situaţie, studenţii au votat acele proiecte care li s-au părut cele mai relevante.

4. Rezultate ale studiului

4.1. Prima situaţie: prelucrarea unui material puţin cunoscut

La primul experiment, desfăşurat în anul şcolar 2002-2003, studenţii au avut de alcătuit o hartă a conceptelor cuprinse în programele de matematică M1, pentru clasa a XI-a. În cadrul acestui experiment, au fost obţinute cinci hărţi conceptuale.

Studenţii cunoşteau programele pentru clasa a XI-a, doar din practica pedagogică (desfăşurată în semestrul al II-lea al anului anterior). Ca strategie de lucru, ei au alcătuit mai întâi o listă de concepte-cheie, obţinute prin parcurgerea *liniară* a programei, apoi au construit hărţile conceptuale corespunzătoare.

În fig.1 se poate observa opţiunea unei grupe de lucru pentru o hartă de tip păianjen.

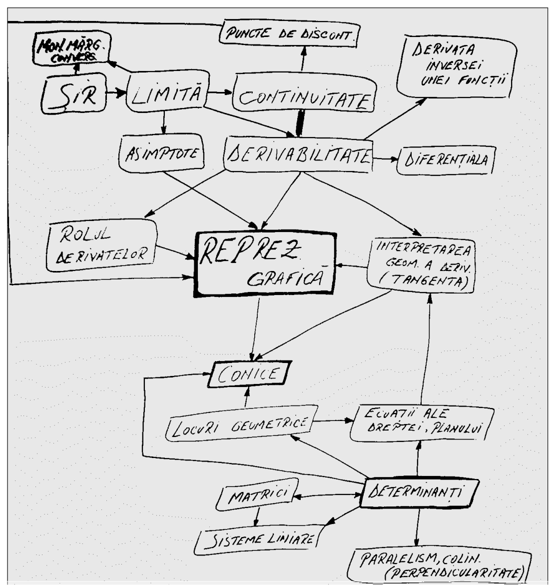


Fig.1. Hartă conceptuală de tip păianjen.

Al doilea experiment a fost desfăşurat în anul şcolar 2004-2005. El s-a referit la studiul programelor de matematică pentru clasa a VII-a. În cadrul acestui experiment, au fost obţinute patru hărţi conceptuale.

Înaintea desfăşurării activităţii, studenţii nu cunoşteau deloc programele de matematică pentru clasa a VII-a: atât la cursurile de Pedagogie şi de Metodica predării matematicii, cât şi în Practica pedagogică, se studiază doar programele pentru liceu.

Din punct de vedere al strategiei de lucru alese de către studenţi, diferenţele au constat mai ales în modul de parcurgere şi înţelegere a materialului propus: în timp ce unul dintre grupurile de lucru a parcurs programa secvenţial, determinând conceptele-cheie pentru fiecare secţiune a programei în parte, celelalte trei au optat pentru parcurgerea *liniară* (integrală) a programei şi determinarea unor concepte ce se regăsesc în mai multe secţiuni. Numărul de concepte alese variază de la 23 în primul caz, la 12-13 în al doilea caz.

O a doua diferenţă semnificativă provine din modul de structurare a hărţilor: în timp ce primul grup de lucru a optat pentru o structură de tip păianjen, cu trei concepte-cheie (prezentată în Fig. 2), celelelte grupuri de lucru au alcătuit structuri de tip ierahic (un exemplu este prezentat în Fig. 3)[2].

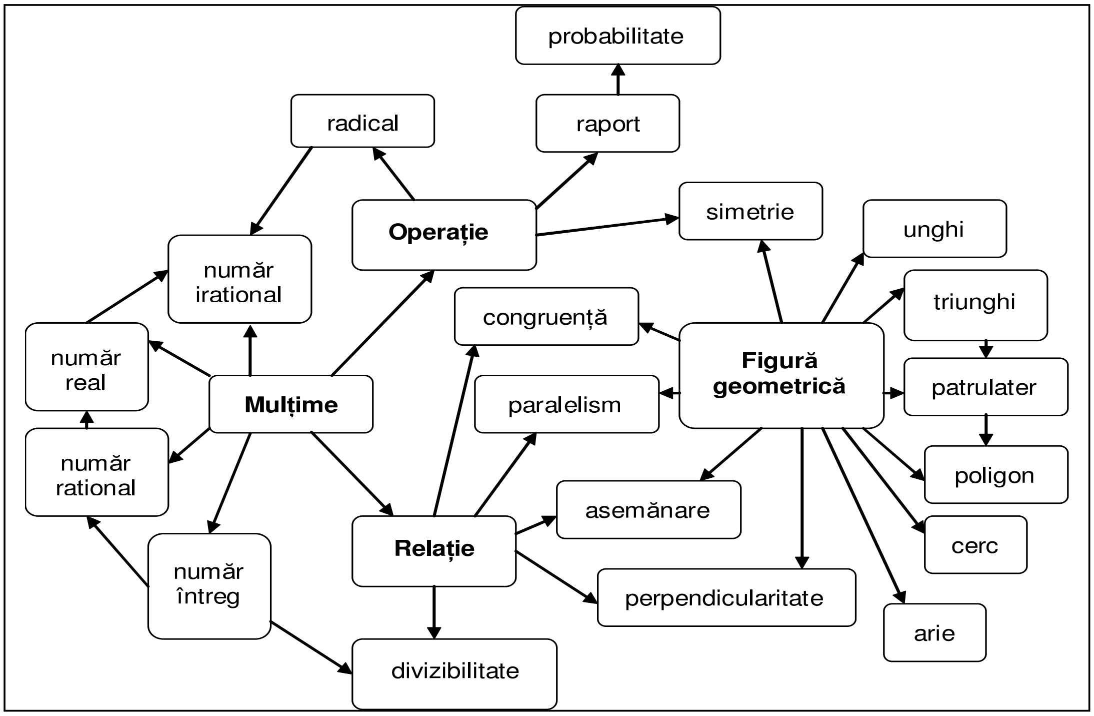


Fig.2. Hartă conceptuală de tip păianjen.

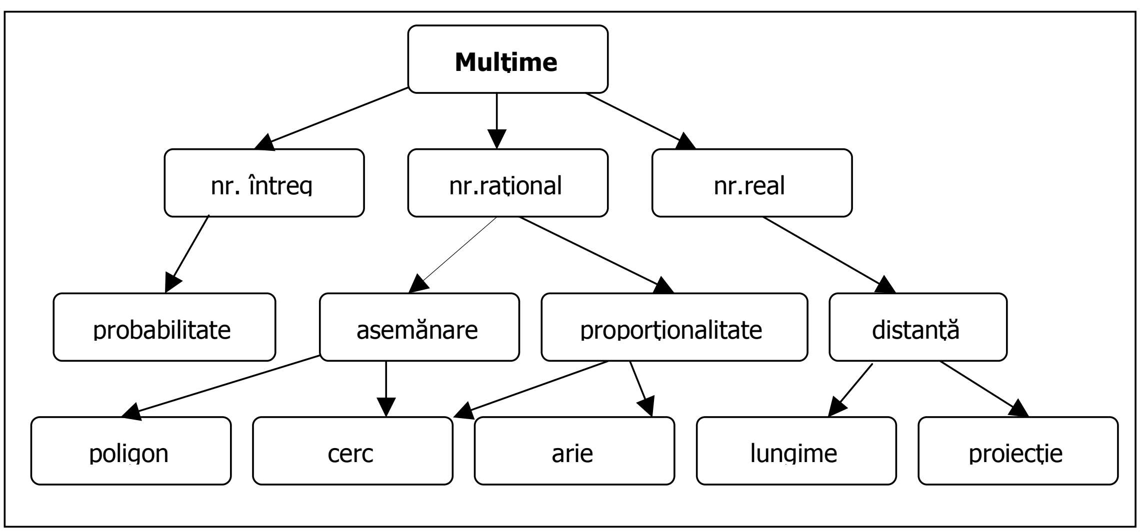
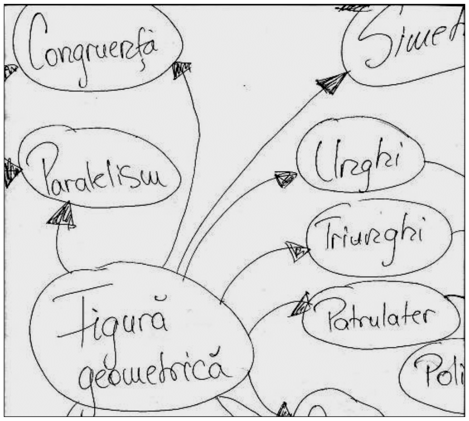


Fig.3. Hartă conceptuală de tip ierarhic.

[2] Aceste hărţi sunt preluate [3]



În figurile 2 şi 3, prezentate mai sus, apar transcrieri ale hărţilor iniţiale, modul de aşezare în pagină fiind uşor modificat. Pentru comparaţie, în fig.4 apare o fotografie (parţială) a hărţii prezentate în fig. 2.

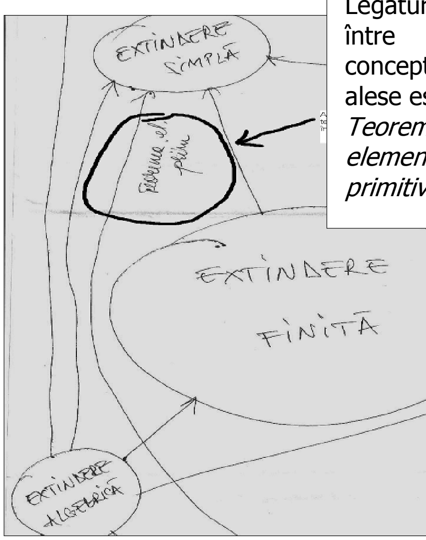
Menţionăm că, în toate cazurile, studenţii nu au primit nici-un fel de informaţii preliminare sau exemple de hărţi conceptuale, anterior desfăşurării activităţii.

Fig. 4. Fotografia unei harţi conceptuale.

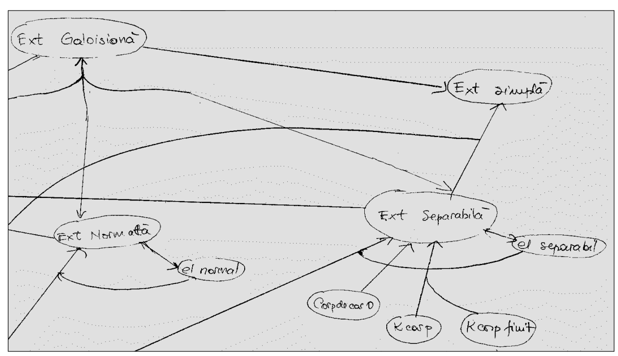
4.2. A doua situaţie: prelucrarea unui material relativ cunoscut

În al treilea experiment, desfăşurat la seminariile recapitulative de sfârşit de semestru, studenţii au prelucrat informaţiile din cursul de Algebră, în care a fost studiată, în principal, Teoria lui Galois. În total, au fost obţinute 10 hărţi conceptuale.

Materialul de studiu a fost relativ cunoscut, datorită unei bune prezenţe a studenţilor la curs (pe parcursul semestrului, indicele de prezenţă a fost de 70%) şi datorită lucrărilor de verificare periodică, administrate anterior acestei activităţi. Probabil că această situaţie a determinat o alegere relativ unitară şi echilibrată a numărului de concepte alese: majoritatea grupurilor de lucru au ales cam aceleaşi 20 de concepte. Un echilibru se constată şi din punctul de vedere al formelor de organizare şi prezentare a informaţiei: printre hărţile obţinute, am identificat patru hărţi de tip *păianjen*, trei hărţi *ierarhice* şi alte trei hărţi de tip *liniar*. În fig. 5 prezentăm fotografii ale unora dintre aceste hărţi.



Legătura între conceptele alese este *Teorema elementului primitiv.*



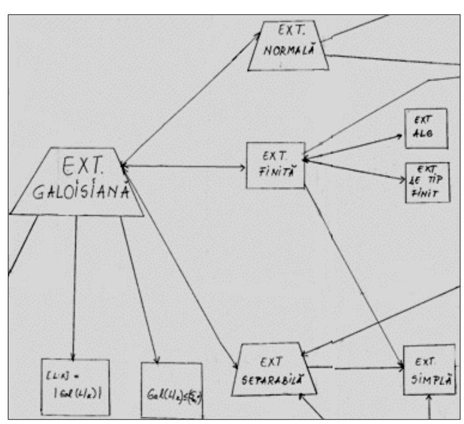
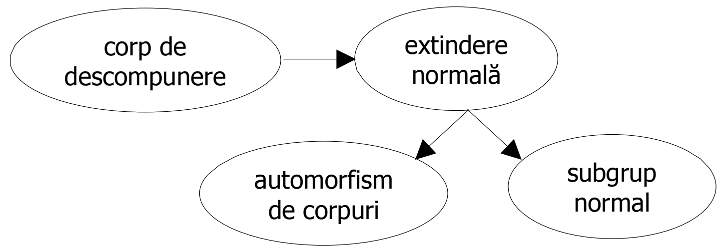


Fig.5.
Fotografii ale unor hărţi conceptuale realizate de studenţi, la seminariile de Algebră.

Ulterior, în cadrul examenului de la sfârşitul semestrului al II-lea, am adresat studenţilor şi întrebări de tipul de mai jos, care au vizat cunoaşterea conceptelor şi a relaţiilor dintre ele:

Enunţaţi rezultatele corespunzătoare arcelor din harta conceptuală alăturată.



(De exemplu, unul dintre rezultatele cerute este următorul: *Dacă P(X) este un polinom cu coeficienţi în corpul comutativ K, iar L este un corp de descompunere al lui P(X), atunci extinderea de corpuri $K \subset L$ este extindere normală.*)

Întrebări ce vizau cunoaşterea conceptelor şi a relaţiilor dintre ele, au fost adresate studenţilor şi în cadrul examenului din primul semestru; acest examen nu a beneficiat, însă, de o activitate de seminar de întocmire a unei hărţi conceptuale. Comparativ, mediile obţinute de studenţi în cele două semestre, pentru acest tip de întrebări, au fost:

Semestrul I	*Semestrul al II-lea*
7,04	7,15

5. Concluzii

Cele două situaţii prezentate mai sus ne îndreptăţesc să formulăm următoarea ipoteză: *numărul de concepte-cheie selectate pentru alcătuirea unei hărţi conceptuale, precum şi modul de prezentare grafică ales, depind de gradul de cunoaştere a materialului de lucru şi de modul de parcurgere al acestuia (i.e. secvenţial sau integral).*

În urma discuţiilor şi/sau a votului exprimat de studenţi, a devenit evidentă preferinţa lor pentru hărţile conceptuale de tip ierarhic. Probabil că aceasta are legătură cu sistemul axiologic al actualelor generaţii de elevi/studenţi, dar datele pe care le deţinem nu ne permit să formulăm concluzii în acest sens.

Rezultatele înregistrate de studenţi la examene ne permit să formulăm o a doua ipoteză: *cunoaşterea şi înţelegerea conceptelor şi a relaţiilor de interdependenţă între ele este facilitată de organizarea informaţiilor în hărţi conceptuale.*

6. Dezvoltări ulterioare

Ne propunem să aplicăm strategia hărţilor conceptuale şi la alte cursuri/seminarii din Facultatea de Matematică şi Informatică, acordând un timp mai mare de lucru pentru alcătuirea acestora şi diversificând cerinţele formulate. De asemenea, ne propunem să identificăm parteneri pentru aplicarea acestei strategii şi în alte unităţi de învăţământ. În acest fel, sperăm că vom putea confirma sau infirma ipotezele enunţate mai sus.

Bibliografie

[1] Gardner, H., *Mintea disciplinată,* Ed. Sigma, Bucureşti, 2005.
[2] Singer, M. (coord.), *Ghid metodologic. Aria curriculară Matematică şi Ştiinţe ale Naturii,* Ed. Aramis Print, Bucureşti, 2002.
[3] Singer, M., Voica, C., *Didactica ariilor curriculare Matematică şi Ştiinţe ale naturii, Tehnologii,* Proiectul pentru Învăţământul Rural, MEC, 2005.
[4] White, R., Gunstone, R., *Probing understanding*, The Falmer Press, London, 1992.

CE ESTE DIDACTICA MATEMATICII?

Scopul *ROMAI Educational Journal* este promovarea cercetării în Didactica Matematicii în România şi popularizarea unor bune-practici de educaţie matematică internaţională. Deoarece persistă încă diferite confuzii privitoare la ceea ce ar putea reprezenta aceste subiecte, în continuare formulăm câteva principii generale şi posibile direcţii de cercetare, care ar putea ajuta autorii în alegerea subiectelor viitoarelor articole.

Didactica Matematicii este orientată pe *optimizarea învăţării şi înţelegerea obstacolelor în învăţare ale elevilor/studenţilor.* Ea are ca scop *descoperirea unor strategii pentru generarea progresului în învăţare.* De aceea, articolele pe care le aşteptăm spre publicare în această revistă ar trebui să pună în prim-plan *elevul/studentul.*

International Commision on Mathematical Instruction (ICMI), organism internaţional fondat în 1908, sugerează teme de cercetare în didactica matematicii, prin subiectele de discuţie propuse la International Congresses on Mathematical Education (ICME), manifestările cele mai importante în domeniu.

ICME are loc o dată la patru ani; cel mai recent Congres a avut loc în perioada 4 - 11 iulie 2004, în Copenhaga, şi a reunit peste 4 000 de participanţi.

Printre subiectele propuse pentru Congresul din 2004, menţionăm: *tendinţe în educaţia matematică în şcoala primară/ în gimnaziu/ în liceu; activităţi şi programe pentru elevii dotaţi; cercetări în predarea şi învăţarea numerelor şi aritmeticii; cercetări în predarea şi învăţarea algebrei; cercetări în predarea şi învăţarea geometriei; cercetări în predarea şi învăţarea probabilităţilor şi statisticii; cercetări în predarea şi învăţarea analizei matematice; inovaţii în predarea matematicii; rolul şi utilizarea tehnologiei în predarea şi învăţarea matematicii, vizualizarea în predarea şi învăţarea matematicii; rolul istoriei matematicii în educaţia matematică; rezolvarea de probleme în educaţia matematică; raţionament şi demonstraţie în educaţia matematică; aplicaţii ale matematicii şi modelare în predarea şi învăţarea matematicii; relaţia dintre matematică şi alte discipline de artă şi ştiinţe; învăţare şi cunoaştere: formarea la elevi a conceptelor, noţiunilor, strategiilor şi convingerilor; educaţia, viaţa profesională şi dezvoltarea profesională a profesorilor de matematică; motivaţia şi atitudinea elevilor faţă de studiul şi învăţarea matematicii; limbaj şi comunicare în educaţia matematică; problema genului în educaţia matematică; cercetări privind evaluarea şi testarea la matematică; noi tendinţe în educaţia matematică, ca disciplină de studiu.*

Alte informaţii despre ICME 10 se pot obţine la adresa de internet: *www.ICME-10.dk*

SOCIETĂŢI DE MATEMATICĂ DIN ALTE ŢĂRI

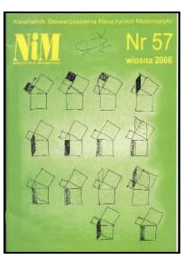
În 1991 a luat fiinţă în Polonia, **Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki** (Societatea Profesorilor de Matematică) (SNM). Iniţial, societatea a avut 200 de membri, ajungând astăzi să aibă câteva mii.

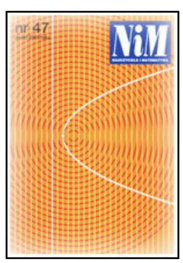
Principalul obiectiv al acestei Societăţi este aducerea în prim-planul activităţilor profesorilor de matematică a unor teme actuale de didactică.

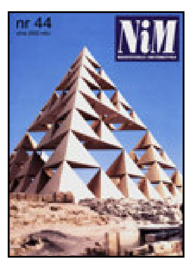
SNM are câteva grupuri de lucru permanente, printre care: Geometria *Cabri*, Matematica şi Computerul, Matematica în şcolile speciale, Calculatoarele grafice *Casio*, Origami şi matematica.

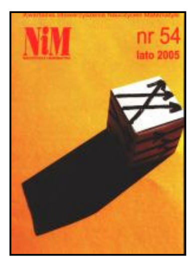
În fiecare an, SNM organizează o Conferinţă internaţională, la care participă în medie peste 600 de profesori şi matematicieni, cei mai mulţi din Polonia. De regulă, conferinţele sunt tematice, majoritatea lucrărilor prezentate încadrându-se în tema fixată anterior. De exemplu, tema uneia dintre conferinţele din anii trecuţi a fost *Statistica, statistica...*. Partea cea mai interesantă a Conferinţelor pare însă a fi *Atelierul*. Prelungite târziu în noapte, aceste întâlniri non-standard au rolul să faciliteze comunicarea între profesori şi matematicieni din diverse colţuri ale lumii. În *Atelier* se confecţionează materiale didactice, se sugerează modul în care acestea pot fi folosite clasă, se discută despre manuale şcolare etc.

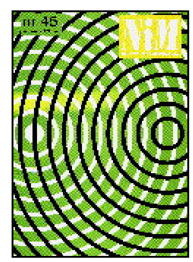
Societatea Profesorilor de Matematică din Polonia editează două reviste, cu apariţie trimestrială. O primă revistă este *Nauczyciele i Matematyka* (NiM) (Profesorul şi matematica). În NiM sunt publicate mai ales articole privind *activitatea la clasă* a profesorului de matematică. În imaginile de mai jos, apar câteva dintre coperţile acestei reviste.



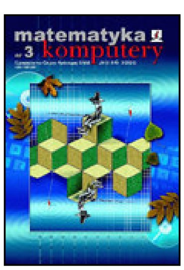


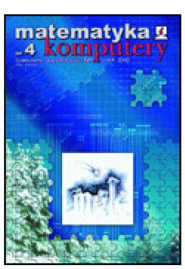


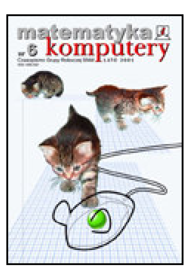


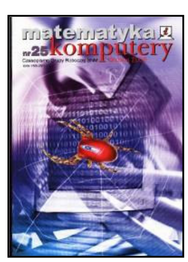


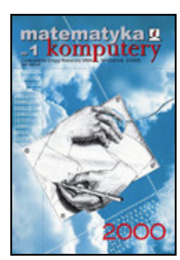
O a doua revistă publicată de SMN este *Matematyka i Komputery* (Matematica şi Computerul). În imaginile de mai jos, apar câteva dintre coperţile acestei reviste.

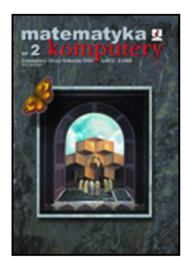












Mai multe informaţii se pot obţine de la adresa de Internet: http://www.snm.org.pl/

MANIFESTĂRI INTERNAŢIONALE

Societatea Europeană de Cercetări în Educaţia Matematică (ERME) organizează în perioada 22-26 februarie 2007, în Larnaca, Cipru, Congresul European de Cercetare în Educaţia Matematică (CERME 5). Tematica propusă pentru acest Congres este cea prezentată în continuare.

1: The role of metaphors and images in the learning and understanding of mathematics
2: Affect and mathematical thinking
3: Building structures in mathematical knowledge
4: Argumentation and proof
5: Stochastic thinking
6: Algebraic thinking
7: Geometrical thinking
8: Mathematics and language
9: Tools and technologies in mathematical didactics
10: Mathematics education in multicultural settings
11: Different theoretical perspectives / approaches in research in mathematics education.
12: From a study of teaching practices to issues in teacher education.
13: Applications and modelling
14: Advanced mathematical thinking
15: Comparative Studies in Mathematics Education

Mai multe informaţii puteţi obţine de la adresele de internet:
http://www.erme.uni-osnabrueck.de
http://www.cyprusisland.com/cerme/

ROMAI EDUCATIONAL JOURNAL

INSTRUCŢIUNI PENTRU AUTORI

Articolele propuse spre publicare în această revistă pot fi scrise în română, engleză sau franceză, folosind limbajul Microsoft Office Word, fontul Tahoma, mărimea literei 12. Prima pagină va conţine titlul articolului, autorul (autorii), afilierea autorului (autorilor), adresa completă a autorului (autorilor), inclusiv adresa de e-mail, titlul articolului în limba engleză (dacă articolul este scris într-o altă limbă), un abstract în limba engleză. Dacă este cazul, în articol pot fi inserate fotografii sau imagini. Bibliografia va include toate datele semnificative (autorii, titlul, volumul, pagina, anul, editorul), conform regulilor American Mathematical Society. Orice utilizare a unui material publicat anterior va fi referită bibliografic şi va fi marcată corespunzător în lucrare.

Este de preferat ca articolele să nu depăşească 10 pagini.

Pentru articole scrise în format electronic, autorii pot folosi una dintre adresele de e-mail ale membrilor Comitetului de Redacţie, sau pot trimite copii xerox ale articolelor propuse spre publicare pe adresa:

Cristian VOICA
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea din Bucureşti
Str. Academiei 14, 010014
Bucureşti, România

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The papers submitted to publication in our Journal can be written in Romanian, English or French, using Microsoft Office Word, Tahoma font and font size 12. The first page will contain the title, the authors, the author's affiliation and the complete address (including e-mail address), the title in English (if the article is written in another language), and an abstract. If necessary, pictures or images can be included in the paper. The references will include all significant bibliographical data (authors, title, volume, pages, year, and editor), according to the AMS rules. Any use of a published material must be referred to in the paper.

It is preferable that the papers have no more than 10 pages.

In submitting a paper, the authors are invited to send a file using the e-mail addresses of any person from the Editorial Board or to send a Xerox copy to the address:

Cristian VOICA
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
University of Bucharest
Str. Academiei 14, 010014
Bucharest, Romania